2.4 lim(∫)

2.4.1 Fonctions intégrables

Définition 1 : une fonction f positive continue par morceaux sur I est intégrable sur I ssi l'ensemble $\{\int_J f \ / J$ segment inclus dans $I\}$ est majoré.

On pose alors $\int_I f = \mathrm{Sup}\{\int_J f \ / J$ segment inclus dans $I\}$. On a :

Propriété : Soit f une fonction positive continue par morceaux sur I.

(i) Soit (J_n) une suite croissante de segments inclus dans I dont la réunion est égale à I. Alors f est intégrable sur I ssi la suite $\int_{J_n} f$ est convergente.

On a alors : $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f$.

(ii) f est intégrable sur $I = (a, b)$ ssi l'intégrale $\int_a^b f$ est convergente. Alors $\int_I f = \int_a^b f$.

Démonstration : (i) si f intégrable sur I alors pour tout n $\int_{J_n} f$ est majorée donc convergente puisque cette suite est croissante. Réciproquement supposons que la suite $\int_{J_n} f$ soit est convergente. Pour tout intervalle J inclus dans I il existe un intervalle J_n tel que $J \subset J_n$ donc $\int_J f \le \int_{J_n} f$ ce qui prouve que l'ensemble $\{\int_J f \ / J$ segm ent inclus dans $I\}$ est majoré (la suite $\int_{J_n} f$ étant majorée puisque convergente). Supposons que l'une des deux conditions équivalentes précédentes soit vérifiée et posons $l = \lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f$. L'inégalité précédente montre que $\int_J f \le l$, et en passant au sup sur les intervalles J inclus dans I on a $\int_I f \le l$. D'autre part, par définition de l'intégrale de f, on a pour tout entier naturel n : $\int_{J_n} f \le \int_I f$ et passant à la limite $l \le \int_I f$ et finalement $l = \int_I f$.

(ii) L'intégrale $\int_a^b f$ est convergente ssi la suite $\int_{a_n}^{b_n} f$ (où (a_n) et (b_n) sont deux suites de I, (a_n) croissante et (b_n) décroissante convergeant respectivement vers a et b) est convergente, ssi $\int_{(a_n b_n)} f$ converge, ce qui équivaut à dire que f est intégrable sur I d'après (i). Dans ce cas on a $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f$ (d'après (i)) = $\int_a^b f$.

Pour les fonctions à valeurs réelle ou complexes on pose :

Définition 2 : une fonction f à valeurs réelles ou complexes, continue par morceaux sur I est intégrable sur I ssi $|f|$ est intégrable sur I.

Si f à valeurs réelle et posons $f_+ = \mathrm{Sup}(f, 0)$ et $f_- = \mathrm{Sup}(-f, 0)$. Alors f est intégrable ssi les fonctions (positives) f_+ et f_- sont intégrables (ce qui résulte de $f_- \le f_+ + f_- = |f|$ et $f_+ \le f_+ + f_- = |f|$). On pose alors $\int_I f = \int_I f_+ - \int_I f_-$.

Si f est à valeurs complexe et de partie réelle et imaginaire f_1 et f_2 alors f est intégrable ssi f_1 et f_2 le sont (ce qui résulte de l'encadrement $|f_1| \le |f| \le |f_1| + |f_2|$ et $|f_2| \le |f| \le |f_1| + |f_2|$) et on pose $\int_I f = \int_I f_1 + i\int_I f_2$.

2.4.2 théorème (lim(∫))

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ borné ou non et non réduit à un point.

<u>Théorème 1</u> (de convergence monotone) : Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues par morceaux et intégrables sur I, convergeant simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.

Alors f est intégrable sur I ssi la suite réelle $(\int_I f_n)$ est majorée. Dans ce cas :

$$\int_I f = \lim \int_I f_n = \operatorname{Sup}_n \int_I f$$

Dans le théorème suivant l'hypothèse de monotonie est remplacée par une hypothèse de domination :

<u>Théorème 2</u> (de convergence dominée) : Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur I, et φ une fonction continue par morceaux. positive, intégrable sur I. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et si : $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $|f_n| \leq \varphi$ (hypothèse de domination), alors f est intégrable sur I et :

$$\int_I f = \lim \int_I f_n$$

<u>Remarque</u> : dans les conditions du théorème on a $\int_I |f - f_n| \to 0$ i.e (f_n) converge en moyenne vers f (en effet pour tout entier n on a : $|f - f_n| \leq 2\varphi$ et on a le résultat en appliquant le théorème précédent à la suite $|f - f_n|$).

Le théorème suivant est un théorème « élémentaire » ne faisant par intervenir les fonctions intégrables au sens précédent :

<u>Théorème élémentaire</u> : Soit I un intervalle <u>compact</u> de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions de I dans un espace de Banach E continues par morceaux. On suppose que la suite (f_n) converge vers f <u>uniformément</u> sur I. Alors "on peut passer à la limite sous le signe somme" :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx .$$

<u>Démonstration</u> : résulte immédiatement de l'inégalité :

$$\left\| \int_I f_n(x)dx - \int_I f(x)dx \right\| \leq \int_I \| f_n(x) - f(x) \| dx \leq m(I) \operatorname{Sup}_{x\in I} \| f_n(x) - f(x) \| ,$$

où $m(I)$ désigne la longueur de l'intervalle I.

Exercice 12

Si la série $\sum_{k\in Z} a_k e^{ikx}$ converge uniformément vers f sur $[0; 2\pi]$ alors :

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \text{ pour tout } k \text{ de } \mathbb{Z}.$$

(ainsi $\sum_{k\in Z} a_k e^{ikx}$ est la série de Fourier de f, et les coefficients a_k sont définis de façon unique).

2.4.3 Corollaire $(\Sigma(\int))$

Le corollaire suivant est la traduction du théorème 1 pour les séries :

<u>Corollaire 1</u> (intégration termes à termes d'une série de fonctions positives) : Soit (f_n) une suite de fonctions réelles positives continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.

Alors f est intégrable sur I ssi la série $\sum_n \int_I f_n$ est convergente. Dans ce cas :

$$\int_I f = \sum_n \int_I f_n$$

Corollaire 2 (intégration termes à termes d'une série de fonctions) : Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrable sur I telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.

Si la série $\sum_n \int_I |f_n|$ est convergente alors f est intégrable sur I et :

$$\int_I f = \sum_n \int_I f_n$$

De plus on a : $\int_I |f| = \|f\|_1 \leq \sum_n \|f_n\|_1 = \sum_n \int_I |f_n|$

Démonstration : posons $g_n = \text{Inf}\left(\sum_{k=0}^{n} |f_k|, |f|\right)$; (g_n) est une suite croissante convergeant simplement vers $|f|$ (en effet s'il existe N tel que $\sum_{k=0}^{N} |f_k(x)| \geq |f(x)|$ on a $g_n(x) = |f(x)|$ pour $n \geq N$ sinon pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| < |f(x)|$ donc $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|$ et on a : $\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leq g_n(x) \leq |f(x)|$ et $g_n(x)$ converge vers $|f(x)|$). De plus pour tout entier naturel n, g_n est continue par morceaux et intégrable sur I car majorée par $\sum_{k=0}^{n} |f_k|$ intégrable sur I.

Pour tout n on a $\int_I g_n \leq \int_I \sum_{k=0}^{n} |f_k| = \sum_{k=0}^{n} \int_I |f_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_I |f_k|$

donc d'après le théorème de la convergence monotone $f = \lim g_n$ est intégrable

sur I et on a $\lim \int_I g_n = \int_I |f|$. Par passage à la limite dans l'inégalité précédente on obtient :

$$\int_I |f| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_I |f_k|$$

En appliquant l'inégalité précédente à la série de terme général $(f_k)_{k \geq n+1}$ il vient $\int_I \left|\sum_{k \geq n+1} f\right| \leq \sum_{k \geq n+1} \int_I |f_n|$ d'où :

$$\left|\int_I f - \sum_{k=0}^{n} \int_I f_k\right| = \left|\int_I \sum_{k \geq n+1} f_k\right| \leq \int_I \left|\sum_{k \geq n+1} f_k\right| \leq \sum_{k \geq n+1} \int_I |f_k|$$

qui tend vers 0 comme reste d'une série convergente ce qui donne $\int_I f = \sum_{k=0}^{\infty} \int_I f_k$.

Le théorème suivant est un corollaire immédiat du cas élémentaire :

Corollaire 3 (intégration termes à termes d'une série de fonctions positives) : Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions de I dans E espace de Banach continues par morceaux. On suppose que la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur I. Alors "on peut intégrer termes à termes" :

$$\int_I \left(\sum_{n \geq 0} f_n(x)\right) dx = \sum_{n \geq 0} \int_I f_n(x) dx$$

2.4.4 Corollaire (continuité d'une fonction définie par une intégrale) :

Le théorème suivant est un corollaire du théorème de convergence dominée.

Soit f une fonction de $A \times I$ dans $\mathbb{R}$ où A est une partie de $\mathbb{R}^m$.

<u>Théorème</u> (continuité) : On suppose que pour tout x de A la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I et que pour tout t de I la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue. S'il existe une fonction φ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que :

$$\forall\ (x, t) \in A \times I,\ |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

alors la fonction $g(x) = \int_I f(x,t)dt$ est continue sur A.

<u>Démonstration</u> : soit $a \in A$ et considérons une suite (x_n) d'éléments de A convergente vers a. Il s'agit de montrer que $g(x_n)$ converge vers $g(a)$ (v. chapitre « Suites et séries de nombres réels ou complexes »). Pour tout entier naturel n on a : $g(x_n) = \int_I f(x_n,t)dt$. D'après les hypothèses les fonctions $t \mapsto f(x_n, t)$ sont intégrables pour tout n dans I et :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$ et $\forall\ t \in I$: $|f(x_n, t)| \leq \varphi(t)$. De plus pour tout t de I on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n,t) = f(a,t)$ (car la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue pour tout t de I). D'après le théorème de la convergence dominée la suite $g(x_n) = \int_I f(x_n,t)dt$ converge vers $\int_I f(a,t)dt = g(a)$ i.e. g est continue en a.

Comme précédemment on a aussi le cas élémentaire :

<u>Théorème « élémentaire »</u> : Soit I un intervalle <u>compact</u> de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $A \times I$ dans E espace de Banach (A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$**)** continue sur le <u>produit</u> $A \times I$. Alors la fonction définie sur A par $g(x) = \int_I f(x,t)dt$ est continue sur A.

<u>Démonstration</u> : soit $a \in A$ et considérons une suite (x_n) d'éléments de A convergente vers a. A étant ouvert il existe une boule fermée B de centre a et de rayon > 0 incluse dans A. Il existe alors un entier N tel que $n \geq N$ implique $x_n \in B$.

f étant continue sur $B \times I$ qui est un compact comme produit de deux compacts, f y est uniformément continue. Etant donné $\varepsilon > 0$ il existe donc $\alpha > 0$ tel que :

(1) $\quad \forall t \in I,\ \forall x \in B$ et $\|x - a\| \leq \alpha \ \Rightarrow\ \|f(x,t) - f(a,t)\| \leq \varepsilon$.

Comme $x_n \to a$ il existe un entier N' tel que $n \geq N'$ implique $\|x_n - a\| \leq \alpha$.

Par suite pour $n \geq \text{Max}(N, N')$ on a d'après (1) : $\forall\ t \in I : \|f(x_n,t) - f(a,t)\| \leq \varepsilon$

Cela signifie que la suite de fonctions $t \mapsto f(x_n, t)$ converge vers $x \mapsto f(a, t)$ uniformément sur I. D'après le théorème élémentaire du 2.4.2 précédent $\int_I f(x_n,t)dx \to \int_I f(a,t)dx$ ce qui achève la démonstration.

Remarque : dans ce théorème on demande la continuité de $f(x, t)$ par rapport au *deux variables x et t.*