

2.5 $\partial(\int)$

2.5.1 Théorème $\partial(\int)$:

Là aussi on a un théorème qui résulte du théorème de convergence dominée et un autre élémentaire.

Théorème (dérivation sous le signe somme) : Ici A est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout x de A la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I et que $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ existe sur $A \times I$ pour $1 \leq k \leq p$. Si pour $1 \leq k \leq p$ il existe une fonction φ_k continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que :

$$(x, t) \in A \times I, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_k(t)$$

alors la fonction $g(x) = \int_I f(x, t) dt$ est p fois dérivable sur I et pour tout k de $\{1, \dots, p\}$ et tout x de A :

$$g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$$

Démonstration : montrons que g est dérivable sur A . Soit a appartenant à A et (h_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ convergeant vers 0 et telle que $a + h_n \in A$ et $h_n \neq 0$ pour tout entier naturel n . On a :

$$(*) = \frac{g(a + h_n) - g(a)}{h_n} = \int_I \frac{f(a + h_n, t) - f(a, t)}{h_n} dt$$

Pour t fixé dans I et tout entier naturel n on a, d'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists \xi_{t,n} \in]0; 1[\quad \frac{f(a + h_n, t) - f(a, t)}{h_n} = \frac{\partial f}{\partial x}(a + \xi_{t,n} h_n, t)$$

Par hypothèse, pour tout n entier naturel et tout t de I on a donc :

$$\left| \frac{f(a + h_n, t) - f(a, t)}{h_n} \right| \leq \varphi_1(t)$$

Comme pour tout t de I la suite $\frac{f(a + h_n, t) - f(a, t)}{h_n}$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial x}(a, t)$ quand n tend vers l'infini le théorème de la convergence dominée montre que $(*)$ tend vers $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a, t) dt$ quand n tend vers l'infini. Par conséquent g est dérivable en a et : $g'(a) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a, t) dt$.

On termine facilement par récurrence.

Théorème "élémentaire" : Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction $\Omega \times I$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, t) associe $f(x, t)$, continue sur le produit $\Omega \times I$ et différentiable sur Ω par rapport à x pour tout t de I . On suppose de plus que $f'_x(x, t)$ est continue sur le produit $\Omega \times I$.

Alors la fonction g définie sur Ω par $g(x) = \int_I f(x, t) dt$ est différentiable sur Ω (et même continûment différentiable) et on peut "dériver sous le signe somme" :

$$\forall x \in \Omega, \quad g'(x) = \int_I f'_x(x, t) dt.$$

Démonstration : soit x_0 appartenant à Ω , Ω étant ouvert il existe une boule fermée B de centre x_0 et de rayon $r > 0$ incluse dans Ω . Pour $|h| \leq r$ on considère :

$$\begin{aligned}
 (*) &= \left| \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} - \int_I f'_x(x_0, t) dt \right| = \left| \int_I \left[\frac{f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)}{h} - f'_x(x_0, t) \right] dt \right| \\
 &\leq \int_I \left| \frac{f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)}{h} - f'_x(x_0, t) \right| dt.
 \end{aligned}$$

Pour t fixé le théorème des accroissements finis donne l'existence d'un réel $\xi \in]0; 1[$ tel que :

$$\frac{f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)}{h} = f'_x(x_0 + \xi h, t), \text{ soit :}$$

$$(1) \quad \frac{f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)}{h} - f'_x(x_0, t) = f'_x(x_0 + \xi h, t) - f'_x(x_0, t).$$

f'_x étant continue sur le compact $I \times B$ elle y est uniformément continue. Etant donné $\varepsilon > 0$ il existe donc $\alpha > 0$ tel que :

$$(2) \quad \forall t \in I, \quad x \in B \text{ et } |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f'_x(x, t) - f'_x(x_0, t)| \leq \varepsilon.$$

Pour $|h| \leq \min(r, \alpha)$ et pour tout x de Ω on a donc d'après (1) et (2) :

$$\left| \frac{f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)}{h} - f'_x(x_0, t) \right| \leq \varepsilon, \text{ soit pour } |h| \leq \min(r, \alpha) :$$

$$(*) \leq m(I)\varepsilon \text{ où } m(I) \text{ est la longueur de } I.$$

(*) tend donc vers zéro quand h tend vers zéro.

2.5.2 Remarque :

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et si f possède des dérivées partielles sur Ω telles que $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x, t)$ soient continues sur le produit $\Omega \times I$ pour $1 \leq k \leq p$ alors le théorème précédent et le corollaire 2.4.3 montrent que g a des dérivées partielles continues dans Ω et donc que g est *continûment différentiable* dans Ω .

Exercice 13

Calculer $\int_a^b \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}}$ en considérant $\phi(y) = \int_a^b \frac{dx}{(x^2 + y)}$.

Exercice 14

Dans les conditions du théorème calculer la dérivée de $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ où α et β sont deux fonctions dérivables telles que pour tous x de I , $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ appartiennent à I .