2.6 ∫(∫)

Théorème de Fubini (∫(∫)) :

Soient a, b, α et β quatre réels et f intégrable sur $[a, b]\times[\alpha, \beta]$. Alors :

$$\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)dy\right)dx=\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\iint_{[a,b]\times[\alpha,\beta]} f(x,y)dxdy\,.$$

<u>Démonstration</u> : montrons la première égalité dans un le cas particulier où f est continue sur $[a, b]\times[\alpha, \beta]$. Considérons les fonctions $\lambda(x) = \int_a^x\left(\int_\alpha^\beta f(u,y)dy\right)du$ et $\mu(x) = \int_\alpha^\beta\left(\int_a^x f(u,y)du\right)dy$ pour $x \in [a, b]$. D'après 2.4.3 la fonction $u \mapsto \int_\alpha^\beta f(u,y)dy$ est continue sur $[a, b]$ et donc λ est dérivable et $\lambda'(x) = \int_\alpha^\beta f(x,y)dy$.

La fonction $g : (x, y) \mapsto \int_a^x f(u,y)du$ est continue sur $[a, b]\times[\alpha, \beta]$. En effet pour (x, y) et (x', y') appartenant à

$[a, b]\times[\alpha, \beta]$ on a : $|g(x, y) - g(x', y')| = |g(x, y) - g(x', y) + g(x', y) - g(x', y')|$

$$= \left|\int_{x'}^x f(u,y)du+\int_a^{x'}\left(f(u,y)-f(u,y')\right)du\right|$$

$$\leq \int_{x'}^x |f(u,y)|du+\int_a^{x'}|f(u,y)-f(u,y')|du \;\leq M|x-x'| + (b-a)\operatorname*{Sup}_{u\in[a,b]}\left|f(u,y)-f(u,y')\right|,$$

où M est un majorant > 0 de $|f|$ sur $[a, b]\times[\alpha, \beta]$.

f étant uniformément continue sur $[a, b]\times[\alpha, \beta]$ pour $\varepsilon > 0$ donné il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|y - y'| < \eta \;\Rightarrow\; |f(u, y) - f(u, y')| < \varepsilon/(b - a).$$

On a donc $|g(x, y) - g(x', y')| < 2\varepsilon$ pour $|x - x'| < \varepsilon/M$ et $|y - y'| < \eta$.

De plus $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x, y)$, continue sur $[a, b]\times[\alpha, \beta]$, donc d'après 2.5.1 μ est dérivable et $\mu'(x) = \int_\alpha^\beta f(x,y)du$ (en prolongeant f en une fonction continue sur $[a, b] \times]\alpha', b'[$ avec $]\alpha', b'[\subset [a, b]$, pour satisfaire les hypothèses de 2.5.1). De plus $\lambda(a) = \mu(a) = 0$ donc pour tout x de $[a, b]$ $\lambda(x) = \mu(x)$ et en particulier pour $x = b$ d'où l'égalité.