

3.1 meilleure approximation dans un espace vectoriel normé

3.1.1 Définition

Soit E un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E et x un élément de $E - F$. S'il existe $y_0 \in F$ réalisant le minimum de la distance de x à F , i.e si y_0 vérifie :

$$\|x - y_0\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|,$$

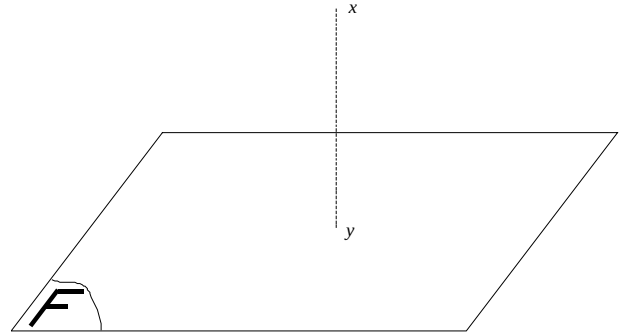
alors on dit que y_0 est une *meilleure approximation* de x dans F .

Deux questions se posent alors :

1/ y_0 existe-t-il ?

2/ si oui y_0 est-il unique ?

Si E est un espace affine euclidien de dimension finie la réponse aux deux questions est oui : y_0 est le projeté orthogonal de x sur F . Dans le cas général tout ne se passe pas toujours conformément à notre intuition géométrique. L'exemple suivant montre qu'il n'y-a pas nécessairement unicité :



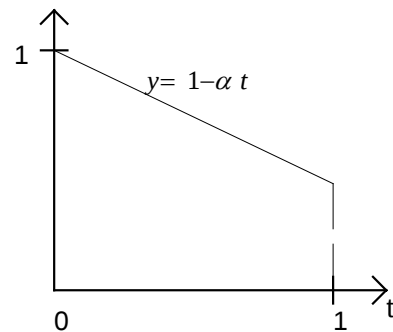
Exemple :

On prend pour E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme ($\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$) et pour F le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions x et x^2 . Cherchons une meilleure approximation de la fonction 1 dans F .

On doit donc trouver α et β réel rendant minimum

$$M_{\alpha,\beta} = \sup_{t \in [0,1]} |1 - \alpha t - \beta t^2|. \text{ En prenant } t = 0 \text{ on obtient } M_{\alpha,\beta} \geq 1. \text{ Comme}$$

$M_{0,0} = 1$ le minimum de $M_{\alpha,\beta}$ pour α et β réels est donc 1. Ce minimum est atteint pour $\beta = 0$ et α réel ≥ 0 (fig. ci-contre), et donc la fonction 1 a une infinité de meilleures approximations dans F .



Exercice 15

Montrer que si y_1 et y_2 sont deux meilleures approximations de x dans F il en est de même de $\frac{y_1 + y_2}{2}$ (il en résulte que si x a deux meilleures approximations distinctes il en a une infinité).

Exercice 16

On suppose que la norme de E soit stricte, c'est-à-dire que pour tous x et y de E :

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } x = \lambda y \text{ ou } y = \lambda x.$$

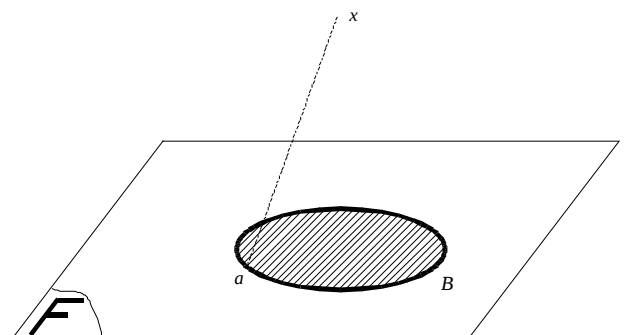
Montrer que si x a une meilleure approximation alors elle est unique.

Le théorème suivant donne une condition suffisante d'existence d'une meilleure approximation.

3.1.2 Une condition suffisante d'existence d'une meilleure approximation :

Théorème : Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors tout x de $E - F$ admet une meilleure approximation dans F .

Démonstration : Soit a un élément de F et considérons :



$B = \{ y \in F / d(x, y) \leq d(x, a) \}$. B est l'intersection de la boule de E de centre x de rayon $d(x, a)$ avec F . B est donc borné et fermé (comme intersection de deux fermés de E). F étant de dimension finie on en déduit que B est un compact de F (v. chap. I).

Soit l'application φ de B dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(y) = d(y, x)$. φ étant continue sur un compact elle atteint ses bornes et en particulier sa borne inférieure :

$$(1) \quad \exists y_0 \in B / \forall y \in B : d(y, x) \geq d(y_0, x).$$

Soit $z \in F$ quelconque : si $z \notin B$ alors $d(z, x) \geq d(a, x) \geq d(y_0, x)$ (d'après (1) car $a \in B$). Si $z \in B$ on a encore $d(z, x) \geq d(y_0, x)$ par (1). Par conséquent pour tout z de F on a $d(z, x) \geq d(y_0, x)$ et y_0 est une meilleure approximation de x dans F .

3.1.3 Cas de espaces préhilbertiens

On suppose ici que E est un espace préhilbertien, c'est-à-dire que E est muni d'un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive si le corps de base est $\mathbb{R}$ ou forme hermitienne définie positive si le corps de base est $\mathbb{C}$). Dans ce cas on peut généraliser la situation élémentaire où E est égal à $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$: il y a existence et unicité d'une meilleure approximation de x dans F . Plus précisément on a le

Théorème : Si E est un espace préhilbertien et si F est un sous-espace vectoriel complet alors tout x de E a une meilleure approximation unique y_0 , caractérisée par le fait que $x - y_0$ est orthogonal à F .

Démonstration : faisons la démonstration dans le cas où F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E (on verra la démonstration générale dans « compléments de Topologie »).

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de F (obtenue, par exemple, à partir d'une base quelconque de F par le procédé de Gram-Schmidt), et posons : $x_i = (x, e_i)$ (pour $1 \leq i \leq n$), produit scalaire de x et e_i . Il est immédiat de constater que le vecteur $x - \sum_{i=1}^n x_i e_i$ est orthogonal à F (car il est orthogonal à tout vecteur e_i), et en particulier à

$\sum_{i=1}^n x_i e_i - y$ pour tout vecteur y de F . Le théorème de Pythagore permet d'écrire pour tout y de F :

$$(1) \quad \|x - y\|^2 = \left\| x - \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i - y \right\|^2.$$

Par conséquent pour tout vecteur y de F : $\|x - y\| \geq \left\| x - \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|$. Le vecteur $y_0 = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ réalise donc le minimum de la distance de x à F : c'est donc une meilleure approximation de x dans F . D'autre part l'égalité (1) montre que si y est une autre meilleure approximation de x dans F on a : $\left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i - y \right\| = 0$ et par suite $y = y_0$ d'où l'unicité.

Remarques : 1/ y_0 est le projeté orthogonal de x sur F .

2/ les hypothèses sont vérifiées dans les cas particuliers suivants :

- $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathbb{C}^n$ munis de leur produit scalaire canonique;
- E est préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie;
- E est un espace de Hilbert (i.e préhilbertien et complet) et F est un sous-espace vectoriel fermé de E .

3.1.4 Exemples et exercices :

Exercice 17

Reprendre l'exemple du 3.1.1 si E est muni de la norme $\|f\| = \left[\int_0^1 f^2(t) dt \right]^{1/2}$.

Exercice 18 (égalité de la médiane) :

Dans un espace préhilbertien démontrer que pour tout x et y :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \text{ (égalité de la médiane).}$$

En déduire une autre démonstration de l'unicité de la meilleure approximation dans le théorème précédent.

Exercice 19 (inégalité de Bessel) :

J étant un ensemble fini, soit $(e_i)_{i \in J}$ une famille orthonormale de E , espace préhilbertien, et $x \in E$. On pose $x_i = (x, e_i)$.

Montrer que : $\sum_{i \in J} |x_i|^2 \leq \|x\|^2$

Exercice 20

Dans E espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de $[0; 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$ modulo les fonctions négligeables

(voir I) et muni de la norme $\|f\| = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right]^{1/2}$ montrer que la meilleure approximation de f sur F sous-espace

vectoriel engendré par e^{ikt} pour $-n \leq k \leq n$ est : $\sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikt}$ (n -ième somme de Fourier de f).

(E est un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \bar{g}$ dont la norme associée est celle de l'énoncé.

Pour ce produit scalaire la famille e^{ikt} pour $-n \leq k \leq n$ est une base orthonormée. F étant de dimension finie tout élément f de E admet une unique approximation dans F donnée par :

$$y_0 = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{ikt} \text{ avec } \alpha_k = (f, e^{ikt}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \hat{f}(k).$$