3.2 approximation d'une fonction continue par des polynômes

3.2.1 Théorème de Weierstrass :

Toute fonction réelle continue sur un intervalle $[a; b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.

<u>Démonstration</u> : par changement de variable affine on peut se ramener à l'intervalle [0; 1]. On définit la suite des <u>polynômes de Bernstein</u> :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k},$$

dont on peut montrer qu'elle tend vers f uniformément sur [0; 1] (voir exercice X de la fin du chapitre).

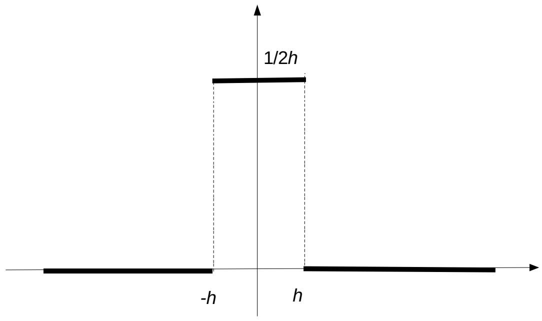
Une autre façon de démontrer ce théorème est d'utiliser la *convolution des fonctions.*

3.2.2 Notions sur la convolution des fonctions :

Soit une fonction f réelle que l'on veut "régulariser". L'idée consiste à remplacer $f(x_0)$ par la moyenne des valeurs de f sur un petit intervalle $[x_0 - h, x_0 + h]$ c'est-à-dire par :

$$g_h(x_0) = \frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(t)dt.$$ En posant $t = x_0 - u$ on obtient

$$g_h(x_0) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x_0 - u)du.$$



Soit ρ_h la fonction valant $1/2h$ sur $[-h; h]$ et 0 ailleurs ("fonction en pic" : voir figure). L'intégrale précédente peut s'écrire :

$$g_h(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_h(u) f(x_0 - u)du.$$

Cette fonction est appelée *convolée de ρ_h et de f,* et se note $\rho_h * f$. On peut montrer que si f est continue par morceaux la fonction $\rho_h * f$ est continue.

De façon générale la convolée $f*g$ de deux fonctions f et g est définie par : $f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du$, qui existe si par exemple f ou g est à support compact dans $\mathbb{R}$. En posant $v = u - x$ on voit que $f*g(x) = g*f(x)$.

Exercice 21

1°/ Soient f et g deux fonctions continues dont une au moins est à support compact.

Montrer que si f est de classe C^p alors la fonction $f*g$ est de classe C^p, et pour tout entier k de $[1, \ldots, p]$ on a $(f*g)^{(k)} = f^{(k)}*g$.

2°/ Avec les notations précédentes montrer que $\lim_{h\to 0} g_h(x) = f(x)$ si f continue en x. En particulier, en posant $f_n = g_{1/n} = f*\rho_{1/n}$, montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions (f_n) converge vers f <u>uniformément</u> sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Si on veut approcher f par des fonctions plus régulières on peut considérer des "fonctions pic" plus régulières que $\rho_{1/n}$, par exemple des fonctions K_n, n fois dérivables vérifiant des propriétés analogues à celles de $\rho_{1/n}$:

1/ K_n est positive et à support compact;

2/ $\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(t)dt = 1$;

3/ Pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $\delta > 0$ il existe un entier N tel que : $n \geq N \Rightarrow \int_{R-[-\delta,\delta]} K_n(t)dt \leq \varepsilon$.

De plus si K_n est de classe C^p (resp. C^∞) $f*K_n$ aussi, et pour $0 \le k \le n$: $\left(f * K_n\right)^{(k)} = f * K_n^{(k)}$. Les fonctions K_n sont appelées *fonctions de régularisation*.

Si f est continue à support compact montrons que la suite $f*K_n$ converge vers f uniformément sur ℝ vers f. On écrit pour tout réel x, compte tenu des conditions 1/ et 2/ ci-dessus :

$$|K_n*f(x) - f(x)| = \left|\int_R f(x-t)K_n(t)dt - \int_R f(x)K_n(t)dt\right| \le \int_R \left|f(x-t) - f(x)\right| K_n(t)dt \quad (*)$$

Soit $\varepsilon > 0$; f étant continue à support compact elle est uniformément continue sur ℝ. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour tout réel t : $(|t| \le \alpha \Rightarrow |f(x-t) - f(x)| \le \varepsilon)$.

On écrit $\int_R \left|f(x-t) - f(x)\right| K_n(t)dt = \int_{|t|\le\alpha} \left|f(x-t) - f(x)\right| K_n(t)dt + \int_{|t|>\alpha} \left|f(x-t) - f(x)\right| K_n(t)dt$ (**)

Le premier terme du second membre de (**) est majoré par $\int_{|t|\le\alpha} \varepsilon K_n(t)dt$ qui est inférieur à $\varepsilon \int_R K_n(t)dt = \varepsilon$. Le second terme du second membre de (**) est majoré par $2M \int_{|t|>\alpha} K_n(t)dt$ où $M = \operatorname{Sup}_{t\in R} |f(t)|$; d'après la condition 3/ ci-dessus il existe un entier N tel que $\int_{|t|>\alpha} K_n(t)dt < \varepsilon$ pour $n \ge N$. Finalement d'après (*) on a pour $x \in$ ℝ et $n \ge N$:

$$|K_n*f(x) - f(x)| \le (2M + 1)\varepsilon,$$

et donc la suite K_n*f converge vers f uniformément sur ℝ.

Remarque : la démonstration est valable si on suppose f uniformément continue sur ℝ et bornée sur ℝ.

Pour démontrer le théorème du 3.2.1 on considère la suite de régularisation $K_n = \alpha_n(1 - t^2)^n$ sur $[-1; 1]$ et 0 ailleurs, la suite α_n étant définie telle que $\int_{-1}^{1} K_n(t)dt = 1$. K_n vérifie les conditions 1/ et 2/ ci-dessus. Montrons qu'elle vérifie aussi la troisième. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta \in]0, 1[$. K_n étant paire et nulle en dehors de $[-1, 1]$ on a

$\int_{R-[-\delta,\delta]} K_n(t)dt = \frac{2}{\alpha_n}\int_\delta^1 (1-t^2)^n dt = \frac{\int_\delta^1 (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt}$. Le numérateur est inférieur ou égal à $\int_\delta^1 (1-\delta^2)^n dt = (1-\delta)(1-\delta^2)^n$ $\le (1-\delta^2)^n$ et le dénominateur est supérieur ou égal à $\int_0^1 (1-t)^n dt$ (car $0 \le t^2 \le t$ si $t \in [0, 1]$) c'est à dire à $1/(n+1)$.

Par conséquent on a $\int_{R-[-\delta,\delta]} K_n(t)dt \le (n+1)(1-\delta^2)^n$. Cette dernière suite tendant vers 0, la dernière condition est donc remplie.

Par conséquent la suite $f * K_n$ converge vers f uniformément sur de ℝ.

Montrons enfin que K_n est un polynôme. Si le support de f est inclus dans $[-1; 1]$ alors l'écriture $f * K_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)K_n(x-t)dt = \int_{-1}^{1} f(t)K_n(x-t)dt$ montre que $f * K_n$ est un polynôme (car $K_n(x-t)$ est un polynôme en x). Si le support de f est inclus dans $[-a; a]$ on pose $g(x) = f(ax)$ dont le support est inclus dans $[-1; 1]$. La suite de polynômes $P_n = g * K_n$ convergence vers g uniformément vers g sur ℝ, c'est à dire

$\operatorname{Sup}_{x\in R} |g(x) - P_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, soit $\operatorname{Sup}_{x\in R} \left|f(x) - P_n\left(\frac{x}{a}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ i.e. la suite de polynômes $P_n(x/a)$ converge uniformément vers f dans ℝ.

3.2.3 Exercices

Exercice 22

a/ Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $[a; b]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\int_a^b t^n f(t)dt = 0$. Montrer que f est nulle sur $[a; b]$.

***b*/** En déduire que $f \mapsto \operatorname{Sup}_{n\in N} \int_a^b t^n \left|f(t)\right| dt$ est une norme de l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 23 (polynôme d'interpolation de Lagrange et phénomène de Runge)

Soit f une fonction réelle sur un intervalle $[a; b]$ et x_0, $\underline{x}_1$, ... ,x_n $n+1$ réels deux à deux distincts de $[a; b]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que $f(x_i) = P_n(x_i)$ pour tout i de $\{0, ... , n\}$ (P_n est le *polynôme d'interpolation de Lagrange* de f relativement aux points x_i). On notera que la suite (P_n) ne converge pas (même simplement) vers f ("phénomène de Runge" : voir « Calcul infinitésimal », Dieudonné p 319).

Exercice 24

Avec les notations précédentes, si f est de classe C^{n+1} sur $[a; b]$, et si P est le polynôme de Lagrange de f relativement aux points x_i, montrer que pour tout x de $[a; b]$ il existe $\xi \in\ ]a; b[$ tel que :

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

En particulier $\|f - P\|_\infty \leq \operatorname{Sup}_{x\in[a,b]} \frac{\left|(x-x_0)...(x-x_n)\right|}{n!} M_{n+1}$ où M_{n+1} est le sup de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a, b]$.