

3.3 approximation par des fonctions en escalier

3.3.1 Fonctions réglées

Définition : une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel normé E est réglée ssi elle admet une limite à gauche et à droite en tout point de I .

Exemple : toute fonction continue est réglée ainsi que toute fonction monotone.

3.3.2 Théorème (approximation des fonctions réglées par des fonctions en escalier)

Théorème : une fonction f de l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E est réglée ssi elle est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions en escaliers.

Rappelons qu'une fonction g est en escalier sur $[a, b]$ ssi il existe une subdivision $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $[a, b]$ telle que g soit constante sur chaque intervalle $]x_i; x_{i+1}[$ (les valeurs aux points x_i sont quelconques).

Démonstration : *condition suffisante* : soit f limite uniforme d'une suite de fonctions g_n en escaliers sur $[a, b]$ et soit $x \in]a, b]$. Il est clair qu'une fonction en escaliers est réglée : soit y_n la limite de g_n en x à gauche. Le théorème général d'interversion des limites (2.1.1) montre que la suite (y_n) a une limite l quand n tend vers l'infini et que

$$\lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t < x}} f(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t < x}} g_n(t) \right) = l. \text{ De même on montrerait que } f \text{ a une limite à droite en } x, \text{ et par conséquent } f \text{ est réglée}$$

sur $[a, b]$.

Condition nécessaire : soit f une fonction réglée sur $[a, b]$. Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction en escaliers g telle que :

$\forall t \in [a, b] : \|f(t) - g(t)\| \leq \varepsilon$ (en prenant $\varepsilon = 1/n$ on pourra construire ainsi une suite de fonctions g_n en escaliers telle que $\forall t \in [a, b] : \|f(t) - g_n(t)\| \leq 1/n$, donc qui converge vers f uniformément sur $[a, b]$).

D'après le critère de Cauchy généralisé (lemme 1.3.2), pour tout t appartenant à $[a, b]$ il existe des réels α_t et β_t tels que $\alpha_t < t < \beta_t$ et :

$$t_1 \text{ et } t_2 \in]\alpha_t, t[\cap [a, b] \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon$$

$$t_1 \text{ et } t_2 \in]t, \beta_t[\cap [a, b] \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon.$$

L'intervalle $[a, b]$ étant compact, du recouvrement ouvert $] \alpha_t ; \beta_t[\cap [a, b]$ de $[a, b]$ on peut en extraire un sous-recouvrement fini : $] \alpha_t ; \beta_t[\cap [a, b]$ pour t appartenant à un ensemble fini J .

Considérons la subdivision de $[a, b]$ constituée

- des point α_t et β_t de l'intervalle $[a, b]$ pour $t \in J$;
- des points t pour $t \in J$;
- des points a et b .

On obtient ainsi une subdivision (a_i) ($1 \leq i \leq p$) de $[a, b]$. Soit g la fonction en escalier définie par :

$$g(a_i) = f(a_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq p \text{ et } : \forall t \in]a_{i-1}; a_i[\quad g(t) = f\left(\frac{a_{i-1} + a_i}{2}\right).$$

Pour tout t de $[a, b]$ on a alors : $\|f(t) - g(t)\| \leq \varepsilon$ d'où le résultat.

Exercice 25

Soit $\mathcal{R}([a, b], E)$ l'espace vectoriel des fonctions réglées de $[a, b]$ dans l'espace de Banach E et muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que $\mathcal{R}([a, b], E)$ est un espace de Banach.

Remarque : le théorème précédent indique que l'ensemble des fonctions en escaliers est *dense* dans $\mathcal{R}([a, b], E)$ muni de la norme de la convergence uniforme.

3.3.3 Théorie de l'intégration des fonctions réglées

On peut faire une théorie rapide et "économique" de l'intégration des fonctions réglées à valeurs réelles : elle est moins générale que la théorie de Riemann mais elle est suffisante dans la plupart des cas usuels et elle permet d'obtenir très facilement tous les résultats essentiels. Tout cela en attendant la "bonne" théorie de l'intégration qui est celle de Lebesgues.

On commence par définir l'intégrale des fonctions en escaliers : si $f = \sum_{i=0}^n \alpha_i \kappa_{I_i}$ où κ_{I_i} est la fonction caractéristique de l'intervalle $I_i = (a_i, a_{i+1})$ avec (a_i) subdivision de $[a; b]$, on pose : $\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^n \alpha_i (a_{i+1} - a_i)$ et on montre que ce réel est indépendant de la subdivision de $[a; b]$ choisie. Si maintenant f est une fonction réglée sur $[a; b]$ c'est la limite uniforme d'une suite de fonctions f_n en escaliers. On pose : $\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt$ en montrant que la suite $\int_a^b f_n(t) dt$ est convergente et que sa limite est indépendante de la suite de fonctions en escaliers f_n tendant vers f . Toutes les propriétés de l'intégrale des fonctions réglées s'obtiennent alors immédiatement par passage à la limite à partir de ces mêmes propriétés pour les fonctions en escaliers.

On généralise immédiatement cette construction aux fonctions réglées d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E .

Exercice 26

Démontrer les propriétés usuelles de l'intégrale des fonctions réglées : linéarité, relation de Chasles, positivité ...

Exercice 27

Soit f une fonction réglée sur un intervalle $[a; b]$. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0$