3.4 approximation par des polynômes trigonométriques

3.4.1 Introduction

Une expression du type $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ où a_k sont des complexes et x est réel est appelé *polynôme trigonométrique*.

On dit que la série trigonométrique $\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ converge ssi la suite $S_n(x)$ est convergente et dans ce cas sa limite est notée $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikx}$. Si cette série converge uniformément sur $[0; 2\pi]$ vers une fonction f alors on a vu que $a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt$ (exercice 12) c'est-à-dire que S_n est la n-ième somme de Fourier de f.

Inversement si f est une fonction réelle, réglée, 2π-périodique on peut considérer sa série de Fourier $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx}$ (avec $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt$). On peut se poser alors plusieurs questions :

- cette série converge-t-elle toujours et de quelle façon ?
- si oui converge-t-elle vers f ?

On verra que la réponse aux deux questions est *non* en général.

3.4.2 Une condition suffisante de convergence simple de la série de Fourier d'une fonction : Théorème de Lejeune-Dirichlet

Soit f une fonction réglée sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, dérivable à gauche et à droite en tout sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de f au point x converge simplement vers $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

(on a noté $f(x+)$ et $f(x-)$ les limites de f en x à gauche et à droite. D'autre part on dit que f est dérivable à droite en x ssi le quotient $\frac{f(x+h)-f(x+)}{h}$ a une limite finie, noté $f'_d(x)$, quand h tend vers zéro par valeurs supérieures; de même f est dérivable à gauche en x ssi le quotient $\frac{f(x+h)-f(x-)}{h}$ a une limite finie, noté $f'_g(x)$, quand h tend vers zéro par valeurs inférieures).

Démonstration : on a :

$$(1)\qquad 2\pi S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} 2\pi\hat{f}(k)e^{ikx} = \int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\right)dt = \int_0^{2\pi} f(t)\varphi_n(x-t)dt$$

en posant : $\varphi_n(u) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iku}$ pour tous réels u.

Pour $u \neq 2k\pi$ on a :

$$\varphi_n(u) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iku} = \frac{e^{inu} - e^{i(n+1)u}}{1-e^{iu}} = \frac{e^{iu/2}.\left(e^{-i(n+1/2)u} - e^{i(n+1/2)u}\right)}{e^{iu/2}.\left(e^{-iu/2} - e^{iu/2}\right)} = \frac{\sin(n+1/2)u}{\sin(u/2)},$$

et si $u = 2k\pi$, $\varphi_n(u) = 2n + 1$.

Examinons quelques propriétés de φ_n :

- φ_n est paire et 2π-périodique;
- $\int_0^{2\pi} \varphi_n(t)dt = 2\pi$.

D'après (1) on a $2\pi S_n(x)=\int_0^{2\pi} f(t)\varphi_n(x-t)dt$; en posant $h = x - t$ dans l'intégrale il vient :

(2) $$2\pi S_n(x)=\int_{x-2\pi}^{x} f(x-h)\varphi_n(h)dh=\int_0^{2\pi} f(x-h)\varphi_n(h)dh$$ par périodicité de f et φ_n.

En remplaçant h par $-h$ dans la dernière intégrale et utilisant la parité et la périodicité de φ_n il vient :

(3) $$2\pi S_n(x)=\int_0^{2\pi} f(x+h)\varphi_n(h)dh .$$

En effectuant la demi somme de (2) et (3) on obtient :

$$2\pi S_n(x)=\int_0^{2\pi}\left(\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}\right)\varphi_n(h)dh .$$ La fonction intégrée étant paire et de période 2π cette égalité peut s'écrire :

(4) $$2\pi S_n(x)=\int_0^{\pi}\left(f(x+h)+f(x-h)\right)\varphi_n(h)dh .$$

On va utiliser cette expression pour montrer que $S_n(x)$ converge vers $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$. Pour cela écrivons :

$$2\pi\left[S_n(x)-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\right]=2\pi S_n(x)-\int_0^{\pi}\left(f(x+)+f(x-)\right)\varphi_n(h)dh \text{ (car } \int_0^{\pi}\varphi_n(t)dt=\pi)$$

$$=\int_0^{\pi}\left(f(x+h)+f(x-h)-f(x+)-f(x-)\right)\varphi_n(h)dh \quad \text{(par (4))}$$

et comme $\varphi_n(h) = \dfrac{\sin\left(n+1/2\right)h}{\sin\left(h/2\right)}$ si $h \neq 0$ cette dernière expression peut s'écrire : $\int_0^{\pi}\Psi_x(h)\sin\left[(n+1/2)h\right]dh$, la fonction Ψ_x étant définie par :

$$\Psi_x(h) = \Psi_x(h)=\frac{f(x+h)-f(x+)}{\sin(h/2)}+\frac{f(x-h)-f(x-)}{\sin(h/2)}$$ si $h \neq 0$ et $\Psi_x(0) = 0$.

La fonction Ψ_x est réglée sur $[0, \pi]$ puisque $\lim_{h\to 0}\Psi_x(h)=2\left(f_d'(x)+f_g'(x)\right)$ et comme dans l'exercice 27 on conclut que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\Psi_x(h)\sin\left[(n+1/2)h\right]dh=0$ soit : $\lim_{n\to+\infty}2\pi\left[S_n(x)-\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}\right]=0$.

3.4.3 Corollaire : condition suffisante de convergence simple vers *f* de la série de Fourier de *f*

Soit f une fonction réglée sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, dérivable à gauche et à droite en tout sur $\mathbb{R}$. Si f est <u>dérivable au point x</u> alors la série de Fourier de f au point x converge vers $f(x)$.

En particulier si f est 2π-périodique et dérivable sur $\mathbb{R}$ sa série de Fourier converge vers f dans $\mathbb{R}$.

La convergence est en général simple. Pour être certain d'avoir une convergence uniforme on doit faire des hypothèses plus fortes :

3.4.4 Condition suffisante de convergence uniforme vers *f* de la série de Fourier de *f*

Soit f une fonction 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, et C^1 par morceaux dans $\mathbb{R}$. Alors sa série de Fourier converge normalement (et donc uniformément) vers f sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : on a : $\hat{f}(k) = -\frac{i}{k}\hat{f}'(k)$ pour $k \neq 0$ (en intégrant par parties sur chaque intervalle où f est de classe C^1, et en notant qu'il y-a des simplifications grâce à la continuité de f), soit : $\left|\hat{f}(k)\right| = \frac{\left|\hat{f}'(k)\right|}{k}$. De plus :

(1) $$\frac{\left|\hat{f}'(k)\right|}{k} \leq \frac{1}{2}\left(\left|\hat{f}'(k)\right|^2 + \frac{1}{k^2}\right).$$

D'autre part, après l'inégalité de Bessel (exercices 19 et 20) :

$\sum_{k=-n}^{n}\left|\hat{f}'(k)\right|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f'(k)\right|^2 dt$. Par conséquent $\left|\hat{f}'(k)\right|^2$ est le terme général d'une série convergente; il en est de même de $1/k^2$, d'où la convergence normale de la série $\sum \hat{f}(k)$ d'après (1), et le résultat d'après le théorème précédent.

Si f est seulement continue la série de Fourier de f on a le résultat plus faible suivant :

3.4.5 Approximation uniforme par une suite de polynômes trigonométriques

Soit f une fonction 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$. Alors il existe une suite de polynômes trigonométriques convergeant vers f uniformément dans $\mathbb{R}$.

Démonstration : on montre à l'exercice XI de la fin du chapitre que si S_k est la k-ième somme de Fourier de f, les *sommes de Féjer* $F_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + ... + S_{n-1}(x)}{n}$, convergent uniformément vers f dans $\mathbb{R}$.

Donnons une autre démonstration utilisant la convolution (voir 3.2.2). Pour cela on considère les fonctions de régularisation K_n définie par $K_n(t) = c_n(1 + \cos t)^n$ pour $t \in [-\pi; \pi]$ et nulle ailleurs, la suite réelle c_n étant choisie de telle façon que $\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(t)dt = 1$

Les conditions 1/ et 2/ du 3.2.2 sont ainsi satisfaites. Montrons qu'il en est de même de la condition 3/ *i*.e :

Pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $\delta > 0$ il existe un entier N tel que : $n \geq N \Rightarrow \int_{R-[-\delta,\delta]} K_n(t)dt \leq \varepsilon$.

Pour δ appartenant à $]0; \pi[$ on a : $\int_{R-[-\delta,\delta]} K_n(t)\,dt = \frac{\int_\delta^\pi (1+\cos t)^n dt}{\int_0^\pi (1+\cos t)^n dt}$ (en utilisant la parité de $(1 + \cos t)^n$).

La fonction cos étant décroissante sur $[0, \pi]$ on a : $\cos t \leq \cos \delta$ pour $t \in [\delta, \pi]$ soit .

$$\int_\delta^\pi (1+\cos t)^n dt \leq \pi(1+\cos\delta)^n.$$

D'autre part : $\int_0^\pi (1+\cos t)^n dt \geq \int_0^{\delta/2}(1+\cos t)^n dt \geq \int_0^{\delta/2}\left(1+\cos\frac{\delta}{2}\right)^n dt = \frac{\delta}{2}\left(1+\cos\frac{\delta}{2}\right)^n$.

On obtient donc $\int_{R-[-\delta,\delta]} K_n(t)dt \leq \frac{2\pi(1+\cos\delta)^n}{\delta(1+\cos(\delta/2))^n}$, et comme $\left(\frac{1+\cos\delta}{1+\cos(\delta/2)}\right)$ est un réel de l'intervalle $]0; 1[$, ε étant donné, il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow \int_{R-[-\delta,\delta]} K_n(t)dt \leq \varepsilon$. Les trois conditions du 3.2.2 sont donc satisfaites. De plus f étant continue et périodique elle est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et une démonstration analogue à l'exercice 21, 2°/ montre que la suite $f * K_n$ converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$. Mais :

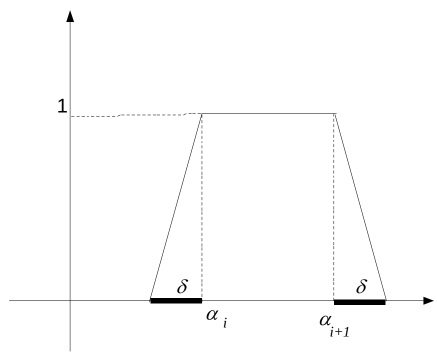
$$f * K_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) K_n(x-t)\,dt = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)[1+\cos(x-t)]^n\,dt$$, et cette dernière formule montre que $f * K_n$ est un polynôme trigonométrique en x ($\cos^k x$ et $\sin^k x$ s'écrivant comme combinaison linéaire de e^{imx}, $m \in \mathbb{Z}$, d'après les formules d'Euler).

3.4.6 Convergence en moyenne quadratique de la série de Fourier de *f* vers *f*

Soit f une fonction 2π-périodique et réglée. Alors sa série de Fourier converge vers f en moyenne quadratique.

Démonstration : elle utilise le

Lemme : soit f une fonction réglée sur $[a; b]$. Alors il existe une suite de fonctions continues convergeant vers f en moyenne quadratique.



Si $\mathcal{R}^1([a; b], E)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions réglées muni de la norme de la convergence en moyenne le lemme précédent signifie que l'ensemble des fonctions continues est dense dans $\mathcal{R}^1([a; b], E)$.

Démonstration de lemme : soit f réglée sur $[a; b]$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction en escaliers g telle que $\|f-g\|_\infty \le \varepsilon / \sqrt{b-a}$ (3.3.2 remarque) d'où on déduit que $\|f-g\|_2 \le \varepsilon$ (en vertu de l'inégalité $\|f\|_2 \le \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$). Or il existe une fonction continue h telle que $\|g-h\|_2 \le \varepsilon$: en effet, g est une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques d'intervalles $[\alpha_i; \alpha_{i+1}]$ et il suffit de remplacer chacune d'elles par une fonction continue comme indiquée sur la figure avec δ suffisamment petit. On aura donc $\|f-h\|_2 \le 2\varepsilon$ d'où le lemme.

Fin de la démonstration : d'après le lemme il existe donc une fonction continue h telle que $\|f-h\|_2 \le \varepsilon$. D'après 3.4.5 il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|h-P\|_\infty \le \varepsilon$, d'où on déduit que $\|h-P\|_2 \le \varepsilon$. Si $P(x) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikx}$ et si S_n est la n-ième somme de Fourier de f on a vu (3.1.4 exercice 20 en remplaçant les fonctions continues par morceaux par les fonctions réglées) que S_n est une meilleure approximation de f dans le sous-espace vectoriel engendré par e^{ikt} pour $-n \le k \le n$ et par conséquent, pour $n \ge N$ on a : $\|f-S_n\|_2 \le \|f-P\|_2$. On écrit, pour $n \ge N$:

$$\|f-S_n\|_2 \le \|f-P\|_2 \le \|f-h\|_2 + \|h-P\|_2 \le 2\varepsilon$$, ce qui achève la démonstration.

Exercice 28 : égalité de Bessel

Soit f réglée sur $[0; 2\pi]$. Alors on a l'égalité de Bessel :

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{k\in Z} \left|\hat{f}(k)\right|^2 .$$

Exercice 29 : égalité de Parseval

Soient f et g deux fonctions réglées sur $[0; 2\pi]$. Alors on a l'égalité de Parseval :

$$(f\,; g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g}(t)\,dt = \sum_{k\in Z} \hat{f}(k)\hat{\overline{g}}(k).$$