1.2 Théorème du point fixe

Soit E un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application contractante (i.e : il existe un réel $k \in [0; 1[$ tel que pour tous x et y de E on ait $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$).

Alors f a un unique point fixe, limite de la suite récurrente définie par $\begin{cases} x_0 \in E \\ x_{n+1.} = f(x_n) \end{cases}$.

<u>Démonstration</u> :

Pour tout entier p on a facilement par récurrence $d(x_{p+1}, x_p) \leq k^p d(x_1, x_0)$. Pour r entier ≥ 1 on écrit $d(x_{p+r}, x_p) \leq d(x_{p+r}, x_{p+r-1}) + ... + d(x_{p+1}, x_p) \leq (k^{p+r-1} + ... + k^p)d(x_1, x_0) = \dfrac{k^p - k^{p+r}}{1-k} d(x_1, x_0) \leq \dfrac{k^p}{1-k} d(x_1, x_0)$. Cette dernière quantité tendant vers 0 avec p, cela prouve que la suite (x_n) est une suite de Cauchy donc convergente vers $\alpha \in E$.

D'autre part pour tout entier n on a $x_{n+1} = f(x_n)$. Une application contractante étant continue on en déduit en faisant tendre n vers l'infini que $\alpha = f(\alpha)$ donc α est point fixe de f.

Si β est un autre point fixe on a $d(\alpha, \beta) = d(f(\alpha), f(\beta)) \leq kd(\alpha, \beta)$. Comme $k \in [0, 1[$ cela implique que $d(\alpha, \beta) = 0$ soit $\alpha = \beta$.

<u>**Remarque**</u> **:** si on remplace $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ par $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous x et y distincts de E, la conclusion peut tomber en défaut. Par exemple si f est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$, on a $f'(x) \in [0, 1[$ pour tout x donc pour tous réels x et y distincts on a $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ d'après le théorème des accroissements finis et f n'a pas de point fixe.

Exercice 2 (Théorème de l'itérée contractante)

Soit E un espace métrique complet et une application $f : E \to E$. S'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p (i.e $f \circ f \ldots \circ f$ p fois) soit contractante alors on a les même conclusions que dans le théorème précédent : f a un unique point fixe, limite de la suite récurrente définie par $\begin{cases} x_0 \in E \\ x_{n+1.} = f^p(x_n) \end{cases}$ (x_0 quelconque dans E).

Exercice 3 : application aux équations différentielles et intégrales

1°/ Soit K une application de $[a, b]\times[a, b]$ ($a < b$) dans $\mathbb{R}$ continue et φ une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ continue. Alors l'équation $f(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)\, f(y)dy + \varphi(x)$ (*équation de Fredholm*) d'inconnue f a une unique solution dans $C([a, b]; \mathbb{R})$ pour λ <u>suffisamment petit</u>.

2°/ Avec les même hypothèses que dans la question 1°/ l'équation $f(x) = \lambda\int_a^x K(x,y)\, f(y)dy + \varphi(x)$ (*équation de Volterra*) admet une solution unique <u>pour toute valeur</u> de λ.

3°/ Soit $t \mapsto A(t)$ étant une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{C})$ (matrices carrées de type (n, n) à coefficients complexes) et g une application de I dans $\mathbb{C}^n$.

Montrer que pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{C}^n$ le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ **(*)** a une unique solution définie dans I.