2.3 Espaces compacts et applications continues

Théorème 1 : Soit f une application continue d'un espace métrique compact dans E dans un espace métrique F. Alors $f(E)$ est un compact de F.

En bref « l'image continue d'un compact est un compact ».

Démonstration :

Soit $(f(x_n))$ une suite de $f(E)$. E étant compact on peut extraire de la suite (x_n) une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers $\alpha \in E$. f étant continue la suite $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(\alpha)$ (I. 2.3.1) donc $f(E)$ est compact.

Conséquences : Soit f une application continue d'un espace métrique compact dans E dans un espace métrique F.

(i) f est bornée;

(ii) Si $F = \mathbb{R}$, f est bornée et atteint ses bornes inférieures et supérieures;

(iii) Si f est bijective f est un homéomorphisme de E dans F.

Le (ii) signifie qu'il existe a et b dans E tels que $f(a) = \operatorname*{Sup}_{x\in E} f(x)$ et $f(b) = \operatorname*{Inf}_{x\in E} f(x)$. C'est une propriété très souvent utilisée. Le théorème de Riezs (voir 4.2) en donne un exemple d'application ainsi que les trois exercices suivants.

Démonstration :

(i) Clair d'après le théorème 1 et le fait qu'un compact est borné.

(ii) Même démonstration qu'en I.2.3.2 du chapitre « Suites de nombres réels ou complexes ».

(iii) Il s'agit de montrer que f^{-1} est continue. Soit Y un fermé de E. D'après le (ii) du corollaire du 2.2 Y est un compact de E donc $f(Y) = (f^{-1})^{-1}(Y)$ est un compact de F donc fermé dans F. L'image réciproque par f^{-1} de tout fermé de E étant fermée dans F, f^{-1} est continue.

Exercice 8

Soit E un espace métrique compact et f une isométrie de E dans E. Montrer que f est bijective.

Exercice 9 : distance dans un espace métrique d'un point à un fermé

Soit E un espace métrique où les boules fermées sont compactes (par exemple $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ d'après le (iii), corollaire du 2.2). Alors pour tout fermé non vide F de E et tout point a de E il existe $\alpha \in F$ tel que $d(a, F) = d(a, \alpha)$ (autrement dit le point a a une meilleure approximation dans F).

Exercice 10 : un autre théorème du point fixe

Soit f une application d'un compact E dans lui-même tel que pour tout x et y distincts de E on ait :
$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Montrer que f a un unique point fixe (comparer avec les hypothèses du théorème du point fixe)

(Indication : considérer l'application $x \mapsto d(f(x), x)$ de E dans $\mathbb{R}$).

Exercice 11 : encore un théorème du point fixe

Soit E un espace vectoriel normé et K un compact convexe de E. Soit f un application de K dans K telle que pour tous x et y de K, $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$. Montrer que f a au moins un point fixe.

Exercice 12

Soit E un espace métrique compact et $(F, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'on définit une norme dans l'espace vectoriel $C(E, F)$ des applications continues de E dans F en posant $\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in E}\|f(x)\|$. Si F est complet, C(E, F) muni de cette norme aussi (cela généralise les propriétés de $C([a, b], \mathbf{K})$ de l'introduction).

L'exercice suivant utilise le (iii) du théorème.

Théorème 2 : Soit f une application continue de E espace métrique compact dans un espace métrique F. Alors f est uniformément continue dans E.

Ce théorème a été souvent utilisé dans les chapitres précédents : convergence des polynômes de Bernstein, continuité de $x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$ etc.

<u>Démonstration du théorème 2</u> : même démonstration que le théorème 2 du 2.3.2 de « Suites et séries de fonctions »).