3.1 Définitions et propriétés

Un espace métrique E est *connexe* ssi il ne peut pas s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts non vide.

Intuitivement E est en « un seul morceau ».

On voit immédiatement que la définition est équivalente à : les seules parties à la fois ouvertes et fermées sont E et l'ensemble vide.

Par exemple $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe puisqu'il s'écrit $]-\infty\,;\sqrt{2}\,[\cap\mathbb{Q}\ \cup\ ]\sqrt{2}\ ;+\infty\,[\cap\mathbb{Q}$.

Les principales propriétés générales des ensembles connexes sont les suivantes :

<u>Propriétés</u> :

(i) Un ensemble E est connexe ssi les seules applications continues de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0; 1\}$ sont les applications constantes;

(ii) Si A et B sont deux parties non disjointes et connexes d'un espace métrique E alors $A \cup B$ est connexe;

(iii) Si A est une partie connexe de E et si B est telle que $A \subset B \subset \overline{A}$ alors B est une partie connexe de E. En particulier si A est connexe, $\overline{A}$ aussi.

(iv) Un produit $E_1\times E_2\times \ldots \times E_n$ est connexe ssi chaque E_k est connexe.

Le (i) donne un critère plus pratique que la définition pour montrer qu'un ensemble est connexe.

<u>Démonstration</u> :

(i) *Condition nécessaire* : notons que dans $\{0, 1\}$ les ensembles $\{0\}$ et $\{1\}$ sont ouverts puisque $\{0\} =$

$]-1/2; 1/2[\cap\{0, 1\}$ et $\{1\} =]1/2; 3/2[\cap\{0, 1\}$. Soit E un ensemble connexe et f une application continue de E dans $\{0, 1\}$. Si f n'est pas constante alors $U = f^{-1}(\{0\})$ et $V = f^{-1}(\{1\})$ sont deux ouverts de E non vides disjoints dont la réunion est E ce qui contredit la connexité de E;

Condition suffisante : supposons que tout application continues de E dans $\{0, 1\}$ soit constante et que E ne soit pas connexe. Il existe alors deux ouverts U et V non vides disjoints dont la réunion est E. Soit f l'application de E dans $\{0, 1\}$ qui associe 0 à tout élément de U et 1 à tout élément de V. Alors f n'est pas constante et est clairement continue puisque l'image réciproque par f de tout sous-ensemble de $\{0, 1\}$ est E, U, V ou $\varnothing$.

(ii) Soit f une application continue de $A \cup B$ dans $\{0, 1\}$. Comme A et B sont connexes les restrictions de f à A et à B sont constantes. Si $a \in A \cap B$ on a donc $f(x) = f(a)$ pour tout x de A ainsi que pour tout x de B, donc f est constante et $A \cup B$ est connexe d'après le (i);

(iii) Soit de même f une application continue de B dans $\{0, 1\}$. A étant connexe la restriction de f à A est constante : il existe $c \in \{0, 1\}$ tel que $f(x) = c$ pour tout x de A. Comme $B \subset \overline{A}$ tout élément y de B est limite d'une suite (x_n) d'élément de A. f étant continue on a $f(y) = \lim f(x_n) = c$, donc f est constante et B est connexe;

(iv) *Condition nécessaire* : si $\prod_{k=1}^{n} E_k$ est connexe, et si p_j est la projection de $\prod_{k=1}^{n} E_k$ dans E_j, p_j est continue donc

$E_j = p_j(\prod_{k=1}^{n} E_k)$ aussi en admettant le théorème du 3.2.

Condition suffisante : faisons la démonstration pour $n = 2$ (on termine facilement par récurrence). Si f est une application continue de $E_1\times E_2$ dans $\{0, 1\}$ et si $(a, b) \in E_1\times E_2$, la connexité de E_1 et E_2 montre que les applications partielles $x \mapsto f(x, b)$ et $x \mapsto f(a, x)$ de E_1 dans $\{0, 1\}$ et de E_2 dans $\{0, 1\}$ sont constantes. Si (x, y) et (x', y') appartiennent à $E_1\times E_2$ on a $f(x, y) = f(x', y)$ et $f(x', y) = f(x', y')$ donc $f(x, y) = f(x', y')$. F est constante donc $E_1\times E_2$ est connexe.

<u>Théorème</u> : les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

<u>Démonstration</u> :

<u>lemme</u> : **(i)** une partie non vide I de $\mathbb{R}$ est un intervalle ssi elle vérifie : (x et y appartiennent à I) $\Rightarrow\ ]x, y[\ \subset I$.

(ii) Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est réunion disjointe et dénombrable d'intervalles ouverts.

<u>Démonstration du le lemme</u> : **(i)** il est clair qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de l'énoncé. Soit $I \subset \mathbb{R}$ vérifiant cette propriété I distinct d'un singleton. Posons $m = \text{Inf } I$ et $M = \text{Sup } I$ (avec $m = -\infty$ si I n'est pas minoré et $M = +\infty$ si I n'est pas majoré); on a $m \neq M$ car I n'est pas réduit à un point. Soit $a \in \,]m, M[$. Comme $m < a$ et $m = \text{Inf } I$ il existe $x \in I$ tel que $x < a$. De même il existe $y \in I$ tel que $a < y$. On a donc $a \in \,]x, y[$ qui est inclus dans I d'après l'hypothèse donc $a \in I$. Ainsi $]m, M[\subset I$; mais $[m, M] \supset I$ donc I est égal à l'un des intervalles $]m, M[$, $[m, M]$, $[m, M[$ ou $]m, M]$ d'où le (i) du lemme.

(ii) Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et considérons dans O la relation R définie pour tout x et y de O par : $x \, R \, y$ ssi $]x, y[\subset O$. R est clairement une relation d'équivalence et d'après le (i) les classes d'équivalences sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et O étant ouvert on voit facilement que ces intervalles sont ouverts. Donc O est réunion disjointe d'intervalles ouverts I_a. Si on choisit dans chaque I_a un rationnel r_a, l'application qui à I_a associe r_a est une injection de l'ensemble $(I_a)_a$ dans $\mathbb{Q}$, donc $(I_a)_a$ est dénombrable.

<u>Démonstration du théorème</u> : montrons qu'un connexe I de $\mathbb{R}$ est un intervalle. Sinon d'après le lemme il existe $(x, y) \in I^2$ tel que $]x, y[$ ne soit pas inclus dans I. Il existe donc c dans $]x, y[$ tel que $c \notin I$. On aurait alors $I =$

$(]-\infty, c[\cap I) \cup (]c, +\infty[\cap I)$ et I s'écrirait comme réunion disjointe de deux ouverts non vides de I, ce qui contredit la connexité de I.

Réciproquement montrons qu'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est connexe. Supposons d'abord que I soit un intervalle ouvert non vide. Si I est non connexe il s'écrit comme réunion disjointe de deux ouverts de I (donc de $\mathbb{R}$ car I est ouvert) U et V, non vides. U et V sont réunion disjointe d'intervalles ouverts (U_i) et (V_j) respectivement. Soient $x \in U$ et $y \in V$ avec par exemple $x < y$. Il existe i tel que $x \in U_i = \,]a, b[\subset U$ et de même il existe j tel que $y \in V_j = \,]c, d[\subset V$. On a $b \notin U$ (sinon b appartiendrait à l'un des intervalles ouvert U_p qui ne serait alors pas disjoint avec U_i) et $b \notin V$ (sinon b appartiendrait à l'un des intervalles ouvert V_q et alors V_q rencontrerait U_i donc U). On a : $x < b < y$, avec x et y dans I et $b \notin I$ ce qui contredit le (i) du lemme. Si I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ on a $\overset{o}{I} \subset I \subset \bar{I}$ et on conclut d'après le (iii) des propriétés précédentes (si $\overset{o}{I}$ est vide, I est réduit à un point qui est clairement connexe).

<u>Autre démonstration</u> : montrons que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes en utilisant la caractérisation (i) de la propriété précédente. Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point et considérons une application continue f de I dans $\{0; 1\}$ non constante. Il existe donc a_0 et b_0 dans I tels que $f(a_0) = 0$ et $f(b_0) = 1$. Soit m le milieu de l'intervalle $[a_0 b_0]$. Si $f(m) = 0$ on pose $a_1 = m$ et $b_1 = b_0$; si $f(m) = 1$ on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = m$. En continuant on construit par récurrence une suite de segments emboîtés $[a_n b_n]$ inclus dans I, de longueur $\dfrac{|a_0 - b_0|}{2^n}$ tels que pour tout entiers naturels n on ait : $f(a_n) = 0$ et $f(b_n) = 1$. Les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite α, et en passant à la limite les deux égalités précédentes il vient grâce à la continuité de f : $f(\alpha) = 0$ et $f(\alpha) = 1$, ce qui est absurde.

Exercice 13

Dans $\mathbb{R}^2$ donner un exemple de suites décroissante de connexes sont l'intersection n'est pas connexe.