3.3 Connexité par arcs

On appelle *chemin* d'un espace métrique E toute application continue de l'intervalle [0; 1] dans E. On dit que E est *connexe par arcs* ssi pour tout point x et y de E il existe un chemin γ qui joint x à y i.e tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

L'exercice suivant donne le lien entre connexité et connexité par arcs :

Exercice 17

1°/ Montrer que si E est connexe par arcs alors il est connexe.

2°/ Montrer que si E est espace vectoriel normé et si D est un ouvert de E on a :

$$D \text{ connexe} \iff D \text{ connexe par arcs}$$

(Indication : si $x_0 \in D$ considérer l'ensemble des points de D qui peuvent être joints à x_0 par un chemin de D et montrer que c'est un ensemble à la fois ouvert et fermé de D).

Contre-exemple : la partie de $\mathbb{R}^2$ constituée de la réunion du graphique de la fonction $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$ et de $\{0\}\times[0; 1]$ est connexe et non connexe par arcs.