4.1 Equivalence des normes dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Théorème : Dans un espace vectoriel normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration du théorème : soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\|.\|$ et $(e_1, \ldots , e_n)$ une base de E. Soit $\|.\|_\infty$ la norme de E définie par $\|x_1e_1 + \ldots + x_ne_n\|_\infty = \underset{1\le k\le n}{\text{Max}}|x_k|$. Montrons que ces deux normes sont équivalentes, ce qui montrera que toutes les normes de E sont équivalentes.

Pour tout $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ de E on a $\|x\| = \| x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \| \le \sum_{k=1}^{n}\|x_ke_k\| = \sum_{k=1}^{n}|x_k|.\|e_k\| \le \left(\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|\right)\|x\|_\infty$

et il existe donc une constante k telle que $\|.\| \le k.\|.\|_\infty$.

Soit d'autre part $S = \{x \in E \,/\, \|x\|_\infty = 1\}$ la sphère unité de E muni de la norme $\|.\|_\infty$. Considérons l'application φ de S dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \|x\|$.

Pour tous x et y de S on a $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\| \le k\|x - y\|_\infty$ ce qui assure la continuité de φ.

D'autre part E étant de dimension finie, S est un compact de $(E, \|.\|_\infty)$ (« Suites réelles et complexes », 2.2), et par conséquent φ est bornée dans S et atteint ses bornes. Il existe donc α et β dans S tels que $\|\alpha\| = m = \underset{x\in S}{\text{Inf}}\|x\|$ et $\|\beta\| = M = \underset{x\in S}{\text{Sup}}\|x\|$. Comme α et β appartiennent à S on a $\|\alpha\|_\infty = \|\beta\|_\infty = 1$ donc $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ et m et M sont des réels strictement positifs.

Soit x un élément non nul de E; $\dfrac{x}{\|x\|_\infty}$ appartient à S donc $m \le \dfrac{\|x\|}{\|x\|_\infty} \le M$ soit $m\|x\|_\infty \le \|x\| \le M\|x\|_\infty$, inégalité encore valable si $x = 0$, ce qui achève la démonstration.

Contre-exemple : on a vu au début du chapitre que dans $C([a; b]; \mathbf{K})$ les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Conséquences : Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie :

(i) E est complet;

(ii) tout sous-espace vectoriel de E est fermé;

(iii) les compacts de E sont les ensembles fermés bornés;

(iv) toute application linéaire de E dans F, espace vectoriel normé quelconque, est continue.

Démonstration :

(i) En prenant une base de E on peut identifier E à $\mathbb{R}^n$. Le (i) résulte alors de ce que $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ est complet et que si un espace vectoriel normé est complet il le reste en remplaçant sa norme par une norme équivalente.

(ii) Un sous-espace vectoriel de E est complet d'après (i) donc fermé (1.1 propriété (ii)).

(iii) Idem, le résultat étant vrai dans $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$.

(iv) Soit f une application de E dans un espace vectoriel normé F et $(e_1, \ldots , e_n)$ une base de E. Si $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ on a $\|f(x)\| = \|f(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)\| = \|x_1f(e_1) + \ldots + x_nf(e_n)\| \le k.\|x\|_\infty$ avec $k = \|f(e_1)\| + \ldots + \|f(e_n)\|$, ce qui assure la continuité de f (voir 4.3.1 (vii)).