4.4 Espaces de Hilbert

Soit E un espace préhilbertien (i.e. un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire définie positive se $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou une forme hermitienne définie positive si $\mathbf{K} = \mathbb{C}$). On sait qu'alors $x \mapsto (x; x)^{1/2}$ est une norme dans E. Si E muni de cette norme est complet on dit que E est un *espace de Hilbert.*

<u>Théorème</u> : Soit F un sous-espace vectoriel fermé non nul d'un espace de Hilbert E.

(i) Si $x \in E$ il existe un unique $x' \in E$ tel que $d(x, F) = \|x - x'\|$ où $d(x, F)$ désigne la distance de x à F i.e $\operatorname*{Inf}_{y\in F}\|y - x\|$.

Notons $x' = p_F(x)$;

(ii) $x' = p_F(x)$ est caractérisé par $x' \in F$ et $x - x'$ est orthogonal à F;

(iii) l'application p_F de E dans E est linéaire, continue et de norme 1;

(iv) Ker $p_F = F^{\perp}$.

p_F est donc la projection orthogonale sur F et x' est la meilleure approximation de x dans F (voir « Suite et série de fonctions, 3.4.1).

<u>Démonstration du théorème</u> :

(i) Soit $d = d(x, F) = \operatorname*{Inf}_{y\in F}\|y - x\|$ la distance de x à F. On a donc $d^2 = \operatorname*{Inf}_{y\in F}\|y - x\|^2$ et pour tout entier naturel non nul n il existe $y_n \in F$ tel que $d^2 \leq \|y_n - x\|^2 \leq d^2 + 1/n$.

Par translation on peut se ramener au cas où $x = 0$ (F devient ainsi un sous-espace affine de E). On a ainsi $d^2 \leq \|y_n\|^2 \leq d^2 + 1/n$ (*) pour tout entier naturel non nul n.

Montrons que la suite (y_n) est de Cauchy. Rappelons que pour tous y et z de E on a l'identité de la médiane : $\|y + z\|^2 + \|y - z\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Pour tous entiers naturels non nuls p et q on a donc :

$$\|y_p - y_q\|^2 = 2\|y_p\|^2 + 2\|y_q\|^2 - \|y_p + y_q\|^2, \text{ soit}$$

$$\|y_p - y_q\|^2 = 2\|y_p\|^2 + 2\|y_q\|^2 - 4\left\|\frac{y_p + y_q}{2}\right\|^2.$$

Comme $\frac{y_p + y_q}{2} \in F$ on a $\frac{y_p + y_q}{2} \geq d$ et l'égalité précédente donne $\|y_p - y_q\|^2 \leq 2(d^2 + 1/p) + 2(d^2 + 1/q) - 4d^2$ soit $\|y_p - y_q\|^2 \leq 2(1/p + 1/q)$, ce qui prouve que la suite (y_n) est de Cauchy dans E. Elle est donc convergente vers un point $x' \in E$. F étant fermé dans E, x' est de plus un élément de F.

En passant l'encadrement (*) à la limite il vient $\|x'\|^2 = d^2$ donc $\|x'\| = d$.

Si x'' est un autre point de E vérifiant $\|x''\| = d$ l'égalité de la médiane donne $\|x' - x''\|^2 = 2\|x'\|^2 + 2\|x''\|^2 - 4\left\|\frac{x'+x''}{2}\right\|^2$.

Or $\left\|\frac{x'+x''}{2}\right\| \geq d$ car $\frac{x'+x''}{2} \in F$ d'où $\|x' - x''\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$, soit $\|x' - x''\| = 0$, donc $x' = x''$, ce qui montre l'unicité de x'.

(ii) Ramenons nous par translation au cas où $x' = 0$ (F reste donc un sous-espace vectoriel de E). Pour tout y non nul de F on a $\|y - x\| \geq \|x\|$ soit $\|y - x\|^2 \geq \|x\|^2$ ce qui donne $\|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}(y, x) \geq \|x\|^2$ ou $\|y\|^2 - 2\mathrm{Re}(y, x) \geq 0$. En remplaçant y par $\lambda y \in F$ où λ est un réel > 0 et en simplifiant par λ on obtient $\lambda\|y\|^2 - 2\mathrm{Re}(y, x) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$. En faisant tendre λ vers 0 on obtient $\mathrm{Re}(y, x) \leq 0$ pour tout y de F. En remplaçant y par $-y$ dans cette dernière inégalité on a $\mathrm{Re}(y, x) \geq 0$ donc $\mathrm{Re}(y, x) = 0$. En remplaçant y par iy dans cette égalité il vient $\mathrm{Re}\, i(y, x) = 0$, donc $\mathrm{Im}(y, x) = 0$ et par conséquent $(y, x) = 0$ pour tout y de F.

Réciproquement supposons que $(y, x) = 0$ pour tout y de F, la relation de Pythagore donne $\|y - x\|^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2$, donc $d(x, F) = \|x - 0\|$ et $0 = p_F(x)$.

(iii) Pour x et y dans E posons $x' = p_F(x)$ et $y' = p_F(y)$. Pour tous scalaires α et β, $\alpha x' + \beta y'$ appartient à F et pour tout z de F on a $(\alpha x + \beta y - \alpha x' - \beta y', z) = \alpha(x - x', y) + \beta(y - y', z) = 0$ donc $\alpha x + \beta y - \alpha x' - \beta y'$ est orthogonal à F et d'après (ii) $\alpha x' + \beta y' = p_F(\alpha x + \beta y)$. p_F est donc un endomorphisme de E.

D'autre part d'après le théorème de Pythagore on a $\|x\|^2 = \|x'\|^2 + \|x - x'\|^2 \geq \|x'\|^2$ donc $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$. L'application p_F est donc continue et de norme ≤ 1. D'autre part si x appartient à F on a $p_F(x) = x$ donc $\|p_F(x)\| = \|x\|$ et $\|p_F\| \geq 1$ et par conséquent $\|p_F\| = 1$.

(iv) x appartient à Ker p_F ssi x est orthogonal à F d'après (ii) d'où le (iv).

Exercice 25

Avec les notations du théorème montrer que $F^{\perp\perp} = F$. Plus généralement si F est un sous-espace vectoriel quelconque de E on a $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

Exercice 26 : théorème de l'isomorphisme de Hilbert

Montrer que l'application de E dans son dual topologique E' qui à $x \in E$ associe la forme linéaire $(. \,;\, x)$ est un isomorphisme isométrique anti-linéaire, bicontinu.