$\boxed{1}$ **Inégalités :** montrer que :
a. Pour tout x de $]0;1[$: $\arcsin x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
b. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \Longrightarrow \dfrac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \dfrac{b-a}{1+a^2}$;
c. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2} : b \leq a \Longrightarrow \dfrac{a-b}{a} \leq \ln \dfrac{a}{b} \leq \dfrac{a-b}{b}$.

$\boxed{2}$ **Applications aux suites :**
1. Montrer que pour tout entier $n > 0$:

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}.$$

En déduire la nature de la suite (x_n) définie par $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et en donner un équivalent simple.
2. Montrer que pour tout réel $\alpha \in]0;1[$ et tout entier naturel non nul n on a :

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire un équivalent simple de la suite (y_n) définie par $y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\alpha}}$ (*séries de Riemann*).

$\boxed{3}$ Soit f une fonction n fois dérivable sur l'intervalle $I = [a;b]$. Montrer que si f s'annule en $n+1$ points de I alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

$\boxed{4}$ **Théorème généralisé des accroissements finis**
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$, dérivables sur $]a;b[$ $(a < b)$, g' ne s'annulant pas sur $]a;b[$. Montrer qu'il existe un point c de $]a;b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(*indication* : considérer l'application $\varphi(x) = f(x) - kg(x)$, k étant un réel choisi de telle façon que φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle sur $[a;b]$).
Application. Règle de l'Hôpital : soient f et g sont deux fonctions continues dans un intervalle I (non vide et non réduit à un point), dérivables dans $I - \{a\}$ $(a \in I)$ où g' ne s'annule pas, et telles que $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite l en a. Alors : $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l$.
Exemples : Trouver les limites des fonctions suivantes au point désigné :
a/ $\dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 4x + 3}$ en 1; **b/** $\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ en 0; **c/** $\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$ en 0.