$\boxed{1}$ Montrer que pour tous sous-ensembles A, B et C d'un ensemble E on a :

$$A \cap (B - C) = A \cap B - A \cap C.$$

$\boxed{2}$ Démontrer les implications :

a. $\begin{cases} B - C \subset A \\ C - D \subset A \end{cases} \Longrightarrow B - D \subset A$; **b.** $\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ B - A = C - A \end{cases} \Longrightarrow B = C.$

$\boxed{3}$ L'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à x associe $5x + 1$ est-elle bijective ? Si oui trouver sa bijection réciproque. Mêmes questions en remplaçant $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

$\boxed{4}$ **1.** Etant donnés deux segments du plan non réduits à un point montrer qu'il existe une bijection de l'un vers l'autre.

2. Trouver une bijection de l'intervalle $]2; 5[$ dans l'intervalle $]1; 8[$; de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$; de $]0; 1[$ dans $\mathbb{R}$; de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0; 1[$.

$\boxed{5}$ Dire si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives. Si ce sont des bijections trouver la bijection réciproque :

1. $\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{1+|x|} \end{array}$;

2. $\begin{array}{rcl} f_2 : \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & A \cap X \end{array}$;

3. $\begin{array}{rcl} f_3 : \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & A \cup X \end{array}$ (A est une partie donnée de E);

4. $\begin{array}{rcl} f_4 : \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & \mathcal{C}_E X \end{array}$;

5. $\begin{array}{rcl} f_5 \ : \ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x - y; x + y) \end{array}$;

6. $\begin{array}{rcl} f_6 \ : \ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 2x + y - 1 \end{array}$:

7. $\begin{array}{rcl} f_7 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x + 1; 2x + 1) \end{array}$.

$\boxed{6}$ Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Montrer que :

1. S'il existe une application g de F dans E telle que $g \circ f = Id_E$ alors f est injective.

2. S'il existe une application h de F dans E telle que $f \circ h = Id_F$ alors f est surjective.

3. Ici les ensembles E et F sont égaux. Montrer que :

$(f \circ f = Id_E \Longleftrightarrow f$ est bijective et $f = f^{-1})$.

$\boxed{7}$ **Image directe d'une partie**
Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et A et B deux parties de E. Montrer que :

(i) $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$;

(ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(iii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. L'inclusion inverse est-elle vraie ? Sinon trouver un contre-exemple. Quelle condition supplémantaire faudrait-il imposer à f pour qu'elle le soit ?

(iv) $f(A - B) \supset f(A) - f(B)$. Inclusion inverse ?

$\boxed{8}$ **Image réciproque d'une partie**

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et A et B deux parties de E.

1. Montrer que

(i) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;

(ii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

(iii) $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$.

2. Montrer que $f^{-1}(f(A)) \supset A$ pour toute partie A de E et $f(f^{-1}(A)) \subset A$ pour toute partie A de F. Donner des exemple d'inclusions strictes.

$\boxed{9}$ Soient E et F deux ensembles *finis* de même cardinal $n \geq 1$ et f une application de E dans F. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective;

(ii) f est injective;

(iii) f est surjective.

Théorie des ensembles et ensembles infinis : en 1874 Georg Cantor construit la théorie des ensembles qui est encore de nos jours le langage naturel des mathématiques. Il s'intéresse au ensemble infinis ce qui l'amena à découvrir qu'il y a des infinis plus grands que d'autres. Le plus petit ensemble infini est celui formé des entiers naturels et tout ensemble ayant même cardinal que $\mathbb{N}$ est dit *dénombrable*. Par exemple $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont des ensembles dénombrables. Mais Cantor démontre que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombre réels n'est pas dénombrable et il existe donc des ensembles infinis plus vaste que l'infinité des nombres entiers ! Après plusieurs années d'effort il parvient même à prouver qu'un espace de dimension n contient le même nombre de points qu'un espace de dimension 1 ce qui l'amène à écrire à un ami : "Je le vois mais je ne parviens pas à le croire !". Il prouve également qu'étant donné un cardinal infini il existe un plus grand encore, et donc il y a une infinité d'infinis différents. Ces résultats provoquent l'incrédulité de nombreux mathématiciens : pendant une dizaine d'années Leopold Kronecker les a attaqués publiquement et violemment au point que Cantor finit par être victime d'une dépression nerveuse. De nos jours l'œuvre de Cantor est à la base de toutes les mathématiques.

L'hypothèse du continu : y a t'il un ensemble dont le cardinal est compris entre le cardinal de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$? La réponse négative à cette question constitue *l'hypothèse du continu*. Toutes les tentatives pour démontrer ce résultat ont lamentablement échoué. Ce n'est qu'en 1963 que Paul Cohen a montré que cette énoncé est indécidable c'est à dire qu'on ne peut démontrer ni cette propriété ni sa négation dans la théorie habituelle des ensembles. Autrement dit on peut ajouter l'hypothèse du continu (ou sa négation) aux axiomes de la théorie des ensembles sans obtenir de contradiction.