$\boxed{1}$ *Algorithme d'Euclide*

Si a et b sont des entier naturels non nuls on note$Div\left(a,b\right)$ l'ensemble des diviseurs communs de a et b et $Div\left(a\right)$ l'ensemble des diviseurs de a.

1. Montrer que si a et b sont deux entiers naturels non nuls et q et r le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b.

Montrer que $Div\left(a,b\right)=Div\left(b,r\right)$.

2. On effectue les divisions successives suivantes :

$$\begin{array}{rcl} a & = & bq_1+r_1;\quad r_1<b \\ b & = & r_1q_2+r_2;\quad r_2<r_1; \\ r_1 & = & r_2q_3+r_3;\quad r_3<r_2; \\ & & \vdots \end{array}$$

Montrer qu'on obtient un reste nul après un nombre fini de divisions.

Si r_n est le dernier reste non nul on a :

$$\begin{array}{rcl} r_{n-2} & = & r_{n-1}q_n+r_n;\quad r_n<r_{n-1}; \\ r_{n-1} & = & r_nq_{n+1}. \end{array}$$

Montrer que r_n est le pgcd de a et b et que $Div\left(a,b\right)=Div\left(r_n\right)$.

3. Déduire de 2/ que a et b sont premiers entre eux ssi il existe $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que :.

$$ua+vb=1\quad(\textit{Théorème de Bezout}).$$

Exemple : trouver deux entiers relatifs u et v tels que $327u+241v=1$.

4. Déduire de 3/ si a, b et c sont trois entiers naturels non nuls on a :

a/ $\left\{\begin{array}{c} a|bc \text{ et} \\ a\wedge b=1 \end{array}\right. \Longrightarrow a|c$ (*théorème de Gauss*).

b/ $\left\{\begin{array}{c} a\wedge b=1 \text{ et} \\ a\wedge c=1 \end{array}\right. \Longrightarrow a\wedge bc=1.$

5. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $11x+56y=12$.

$\boxed{2}$ En utilisant la décomposition d'un entier en produit de nombres premiers, montrer que si $n\in\mathbb{N}$ n'est par un carré, alors $\sqrt{n}$ n'est pas rationnel.

$\boxed{3}$ Dans un sac se trouvent 5 jetons verts numérotés de 1 à 5 et 4 jetons rouges numérotés de 1 à 4.

1. On tire *successivement sans remise* 3 jetons du sac. Trouver le nombre :

a. de tirages possibles; **b.** de tirages ne contenant que des jetons verts; **c.** de tirages ne contenant aucun jeton vert; **d.** de tirages contenant au plus 2 jetons verts; **e.** de tirages contenant exactement un jeton vert et un jeton numéroté 2.

2. Mêmes questions avec un tirage *sumultané* de trois jetons.

3. Mêmes questions avec un tirage *successif avec remise* de trois jetons.

$\boxed{4}$ Dans un jeu de 32 cartes, combien peut-on choisir de "mains" de 5 cartes contenant :

a. exactement un roi; **b.** au moins un roi; **c.** exactement un roi et deux dames; **d.** l'as de pique et au moins deux trèfles; **e.** exactement 2 carreaux, 1 trèfle et 1 coeur; **f.** 1 roi ou un trèfle au moins.

$\boxed{5}$ Le code secret d'un coffre-fort est composé de six chiffres. Tous les chiffres de 0 à 9 sont possibles. Les répétions sont autorisées et le code tient compte de l'ordre. Par exemple 111222 et 222111 sont deux codes possibles distincts.

1. Combien y a-t'il de codes possibles ?

2. Combien y a-t'il de codes dont tous les chiffres sont différents ?

3. Combien y a-t'il de codes ayant exactement deux chiffres différents qui apparaissent trois fois chacun (comme 112122 par exemple) ?

4. Combien y a-t'il de codes ayant exactement trois chiffres différents qui apparaissent deux fois chacun (comme 123312 par exemple) ?

5. Combien y a-t'il de codes ayant deux chiffres identiques et les quatre autres différents (comme 231541 par exemple) ?

$\boxed{6}$ On dispose de 10 boules numérotées et de trois urnes A, B et C. On répartit comme on veut les boules dans les urnes, certaines pouvant rester vides. Calculer le nombre de

a. répartitions possibles ?

b. de répartitions laissant vide les urnes A et B ?

c. de répartitions laissant l'urne A vide ?

d. de répartitions laissant au moins une urne vide ?

e. de répartitions ne laissant aucune urne vide ?

$\boxed{7}$ On veut mettre 7 prospectus dans 10 boîtes numérotées. Combient y a-t'il de façons de procéder si :

1. on met au plus un prospectus par boîte de les 7 prospectus sont identiques;

2. on peut mettre un nombre quelconque de prospectus par boîte et les 7 prospectus sont identiques;

3. Mêmes questions si les prospectus sont tous différents.

$\boxed{8}$ **1.** Montrer que pour tous entiers naturels n et p tels que $1 \leq p \leq n$ on a :

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

En déduire la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\tbinom{n}{k}$.

2. Retrouver ce résultat en considérant la fonction f définie par $f(x) = (1+x)^n$.

3. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k+1}\tbinom{n}{k}$.

$\boxed{9}$ Pour n entier naturel, démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}^2 = \tbinom{2n}{n}$,

de deux façons :

1. en écrivant $(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$;

2. en calculant de deux façons le nombre de parties d'un ensemble à $2n$ éléments (pour l'une des façon, écrire E comme réunion disjointe de deux partie à n éléments).

$\boxed{10}$ **1.** Calculer le nombre d'applications d'un ensemble fini à p éléments dans un ensemble fini à n éléments.

2. Calculer le nombre d'injections d'un ensemble fini à p éléments dans un ensemble fini à n éléments.

3. Calculer le nombre de bijections d'un ensemble fini à p éléments dans un ensemble fini à n éléments.

$\boxed{11}$ Soit E un ensemble fini à n éléments et p un entier compris entre 0 et n.

1. Montrer que le nombre de parties de E à p éléments (appelées aussi *p-combinaisons*) est égal à $\binom{n}{p}$.

2. Montrer que $\binom{n}{p} = \binom{n-p}{p}$ de deux façons :

a. par le calcul;

b. en considérant l'application de $P(E)$ dans lui-même qui à une partie de E associe son complémentaire.

3. Montrer que $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$(pour $0 < p < n$) dedeuxfaçons :

a. par le calcul;

b. en comptant de deux façons le nombre de parties de E à p éléments (pour l'une des façons choisir un élément particulier de E).

$\boxed{12}$ Démontrer par récurrence sur n que pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$ on a :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + ... + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

En déduire la valeur des sommes $\sum_{k=1}^{n} k^m$ pour $k = 1, 2, 3.$