Corrigé

Le problème est de trouver des valeurs approchées des solutions d'une équation $f(x) = 0$ où f est une fonction, le plus souvent continue et dérivable, sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1 Séparation des zéros d'une équation

Séparer les zéros de l'équation $f(x) = 0$ c'est partager l'intervalle I en plusieurs sous-intervalles disjoints dans lesquels l'équation $f(x) = 0$ a une et une seule solution.

L'existence des solutions est établie grâce au théorème de la valeur intermédiaire et l'unicité en utilisant la sticte monotonie de f.

Observer qu'il n'est pas forcément possible d'isoler tous les zéros d'une fonction : traiter par exemple le cas où

$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exemples : isoler les zéros des équations

$P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x - 7;$

$f(x) = x - e^{-x};$

$g(x) = x^3 - x - 1.$

2 Principales méthodes de résolutions approchées

2.1 Méthode de dichotomie

Ecrire l'algorithme du programme calculant la solution de $f(x) = 0$ sur un intervalle donné $I = [a, b]$ avec une précision donnée ε.

Exemple : calculer à 10^{-8} près la solution de l'équation $x - e^{-x} = 0$.

2.2 Méthodes d'approximations successives

2.2.1 Principe général de la méthode

On remplace l'équation $f(x) = 0$ par une équation équivalente $g(x) = x$ et on considère la suite récurrente définie par $x_0 \in I$ et $x_{n+1} = g(x_n)$. Si la suite (x_n) converge (*ce qui n'est pas toujours le cas*) vers α alors α vérifie $g(\alpha) = \alpha$ (si g est continue) et donc α est solution de $f(x) = 0$.

Montrer qu'une condition suffisante de convergence de (x_n) est que l'intervalle I soit stable par g (i.e $g(I) \subset I$), que g soit de classe C^1 sur I et que $\sup\limits_{x \in I} |g'(x)| \leq k$ avec $k \in [0, 1[$.

2.2.2 Méthode de la tangente (ou de Newton)

Montrer que la tangente au point $M\left(t, f\left(t\right)\right)$ à la courbe d'équation $y = f\left(x\right)$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse

$$x = t - \frac{f\left(t\right)}{f'\left(t\right)}.$$

Expliquer comment on construit graphiquement la suite $\left(x_n\right)$ définie par $x_0 \in I$ et :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}.$$

2.2.3 Méthode de la sécante (ou de Lagrange

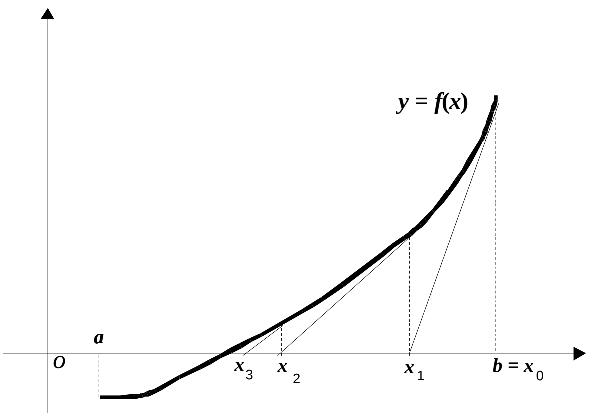
Montrer que la sécante $\left(MB\right)$ (avec $B\left(b, f\left(b\right)\right)$ et $M\left(t, f\left(t\right)\right)$), à la courbe d'équation $y = f\left(x\right)$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse

$$x = t - f\left(t\right)\frac{t-b}{f\left(t\right) - f\left(b\right)}.$$

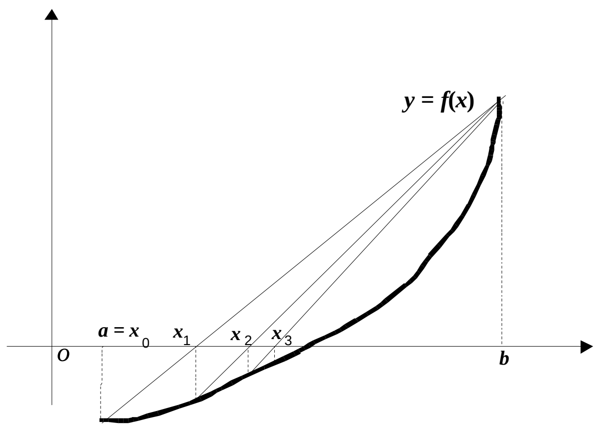
Expliquer géométriquement la construction de la suite $\left(x_n\right)$ définie par $x_0 \in I$ et :

$$x_{n+1} = x_n - f\left(x_n\right)\frac{x_n - b}{f\left(x_n\right) - f\left(b\right)}.$$

(Remarquer l'analogie avec Newton : $f'\left(x_n\right)$ est remplacé par $\frac{f(x_n)-f(b)}{x_n-b}$).



METHODE DE LA TANGENTE



METHODE DE LA SECANTE

Employer les trois méthodes pour les équations :
$x^3 + x - 1 = 0$, $x - e^{-x} = 0$, $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.