Résumé de cours

$\boxed{1}$ Résoudre les équations différentielles du premier ordre

1. $y' + 2y = x^2$;
2. $y' + y = e^x + \cos x$;
3. $(1 + x^2)\, y' = y \arctan x$;
4. $\mathrm{ch}x.y' - \ \mathrm{sh}x.y = \ \mathrm{sh}^3 x$;
5. $(e^x - 1)\, y' = (e^x + 1)\, y$; y a t-il une solution sur $\mathbb{R}$?
6.$(e^x - 1)\, y' + e^x y = 1$; y a t-il une solution sur $\mathbb{R}$?;
7. $(1 + x^2)^2\, y' + 2xy = xe^{1/1+x^2}$.

$\boxed{2}$ Résoudre les équations différentielles du second ordre

1. $y" + 2y' + 2y = 2x$;
2. $y" + 2y' + 2y = xe^x$;
3. $y" - 3y' + 2y = 2x^2$;
4. $y" + y = x \sin x$; solutions vérifiant $y\,(0) = y'\,(0) = 0$;
5. $y" - 3y' + 2y = \sin\,(2x)$;
6. $y" + y = 2\cos^2 x$;
7. $y" - 3y' + 2y = e^x\,(x^2 + 1)$;
8. $y" - 2y' + y = -2xe^{-x} + e^x$.

$\boxed{3}$ **1.** Trouver toute les applications dérivables f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'\,(x) + f\,(-x) = e^x.$$

2. Trouver toute les applications continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\,(x) = \int_0^x tf\,(t)\,dt + 1.$$

(On pourra raisonner par analyse-synthèse).

$\boxed{4}$ Equations à variables séparables

Elles sont du type $y'f\,(y) = g\,(x)$ (x et y sont de part et d'autre du signe $=$). Cela s'écrit aussi, sous forme différentielle :

$$f\,(y)\,dy = g\,(x)\,dx.$$

Si F et G sont des primitives de f et g on obtient en intégrant :

$$F\,(y) = G\,(x) + C.$$

Exemples :

1. $2x^2y' + y^2 = 1$;

2. $x^2y'^2 - y^2(1-y^2) = 0$;

3. $yy' = x$;

4. $\sqrt{1-y^2} - y'\sqrt{1-x^2} = 0$.

5. *Problème d'Allègre* : C. Allègre (ancien ministre de l'Education Nationale) a dit un jour : "Si vous demandez à un élève moyen, étant données deux balles, une de pétanque et une de tennis, lâchées à une certaine hauteur laquelle arrivera au sol la première, il vous répondra que c'est celle de pétanque. En fait elles arrivent en même temps !".

On suppose qu'un objet est lâché près du sol sans vitesse initiale et qu'il subit une force de frottement de l'air proportionnelle au carré de sa vitesse. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par sa vitesse v et calculer sa vitesse limite. Faites un commentaire sur l'affirmation du C. Allègre et sur C. Allègre lui-même.

$\boxed{5}$ Changement de fonction inconnue ou de variables

Résoudre les équation différentielles suivantes en utlilisant le changement de fonction ou de variable indiqué :

1. $(1+e^x)^2 y" - 2e^x(1+e^x)y' - (3e^x+1)y = 0$ (changement d'inconnue $y(x) = z(x).(1+e^x)$);

2. $xy" - (1+x)y' + y = 1$ $(z = y' - y)$;

3. $(x^2+1)^2 y" + 2x(x^2+1)y' + y = 0$ (changement de variable $t = \arctan x$);

4. $x^2y" + xy' - y = x^2$ (changement de variable $t = \ln x$);

5. $y" + (4e^x - 1)y' + 4e^{2x}y = 0$ (changement de variable $t = e^x$).

Bref historique : c'est au début du XVII-ième siècle, avec le calcul différentiel et intégral de Newton et Leibniz, qu'apparut la notion d'équations différentielles. Elles sont issues de problèmes de géométrie et de mécanique. Au début du XVIII-ième siècle les méthodes classiques de résolution de certaines équations (linéaires et de Bernouilli notamment) furent découvertes.

Avec le développement de la mécanique la résolution des équations différentielles devient une branche importante des mathématiques (grâce à Euler, Lagrange, Laplace ...).

C'est Cauchy, à partir de 1820, dans ses célèbres cours de l'Ecole Polytechnique, qui étudie le problème de l'existence et de l'unicité des solutions d'une équation différentielle de façon rigoureuse. En 1868 Lipschitz précise et généralise ses résultats.