Espaces vectoriels : résumé

$\boxed{1}$ Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dire si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$:

$A =$ éléments de $\mathcal{F}$ bornés sur $\mathbb{R}$;

$B = \{f \in \mathcal{F}/\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\}$;

$C =$ ensemble des fonction nulles sur un ensemble J donné;

$D = \left\{f \in \mathcal{F}/ \int_a^b f(t)\,dt = 0,\ a \text{ et } b \text{ donnés}\right\}$;

$E = \{f \in \mathcal{F}/f(x+T) = f(x)\}$ (T réel donné);

$F = \{f \in \mathcal{F}/f(1) = 0\}$;

$G =$ ensemble des fonctions linéaires;

$H = \{f \in \mathcal{F}/\exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq k|x|\}$ (k dépend de f).

$\boxed{2}$ Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x = 2\alpha - 5\beta, y = -\alpha + 3\beta, z = 7\beta\}$.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et que tout élément de E combinaison linéaire de deux éléments de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.

$\boxed{3}$ Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x + 2y = 3z\}$ et G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $w = (1,0,0)$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Les sous-espaces vectoriels sont-ils des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$?

$\boxed{4}$ Soit S l'ensemble des suites réelles, C l'ensemble des suites réelles convergentes, C_0 l'ensemble des suites convergeant vers 0 et D l'ensemble des suites constantes.

1. Montrer que C, C_0 et D sont des sous-espaces vectoriels de S.

2. Montrer que $C = C_0 \oplus D$.

$\boxed{5}$ Soit M l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{R}$, S et A les sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétrique respectivement.

Montrer que $M = S \oplus A$.

$\boxed{6}$ Reprendre le I/ en faisant apparaître, si possible, les ensembles donnés comme noyaux d'applications linéaires.

$\boxed{7}$ Soit E un espace vectoriel et p une projection sur le sous-espace vectoriel F parallèlement au sous-espace vectoriel G.

1. Montrer que $p = p \circ p$.

2. Réciproquement soit p une application linéaire de E dans E vérifiant $p \circ p = p$.

On pose $F = \{x \in E/p(x) = x\} = \ker(p - Id_E)\}$ et $G = \ker p$.

a/ Montrer que $E = F \oplus G$. En déduire que p est la projection sur F parallèlement à G.

La relation $p = p \circ p$ caractérise donc les projections.

b/ Montrer que $F = \operatorname{Im} p$.

On a donc, si p est une projection, $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$.

3. Soit f une application linéaire de E dans E. Montrer que :

$E = \ker f + \operatorname{Im} f \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

$\boxed{8}$ Soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 0\right)$.

1. Montrer que f est linéaire. Est-elle injective ?

2. Trouver $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ et montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

f est-elle une projection ? (voir VII)

$\boxed{9}$ Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Montrer que pour tout entier naturel k on a

$$\ker u^k \subset \ker u^{k+1} \text{ et } \operatorname{Im} u^{k+1} \subset \operatorname{Im} u^k.$$

$\boxed{10}$ Soit $u \in L(E)$ telle que $u^{n+1} = 0$ et $u^n \neq 0$ (où u^n un désigne $u \circ u \circ \ldots \circ u$ n fois).

Montrer que $Id_E - u$ est un automorphisme de E.

Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ (où $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n) définie par $f(P) = P - P'$.

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\boxed{11}$ Vérifier que les applications suivantes sont des linéaires et déterminer le noyau et l'image :

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (4x, y - x, 2x + y)$;

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x + y - z, x - y)$.

Historique : au XVIIIe siècle de développent la résolution des système linéaires et la théorie des déterminants. Les raisonnements suggèrent le concept d'espace vectoriel à n dimensions. De manière indépendante Cayley en Angleterre et Grassmann en Allemagne parlent d'espaces vectoriels de dimension n vers 1843-1845. Le point de vue de Cayley est issu de la géométrie analytique : un vecteur d'un espace à n dimensions est un système de n réels ou n complexes. Grassmann dégage les notions de sous-espace vectoriel et de dimension.

C'est en 1888 que Peano donnera la définition axiomatique d'un espace vectoriel réel.