$\boxed{\mathbf{1}}$ Dans le plan soient les points $A\,(1;2)$, $B\,(2;3)$, $C\,(3;0)$. Calculer l'aire du triangle ABC.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Dans un triangle ABC montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$.
En déduire que dans un triangle ABC on a les relations :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \text{ (\textit{formule des sinus})}$$

(où $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Soient deux droites D et D' non parallèles de l'espace. Montrer qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire à D et D' (cette droite est appelée *perpendiculaire commune à* D *et* D).

Application numérique : trouver la perpendiculaire commune à la droite D passant $A\,(3,3,-1)$ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\,(2,1,-4)$ et la droite D' d'équations $\begin{cases} x = -3z+1 \\ y = z-4 \end{cases}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Calculer les coordonnées des points d'intersections du cercle C d'équation $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ et de la droite D d'équation $x+3y-2=0$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ **1.** Montrer que les coordonnées (x,y) d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ dans une base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ sont données par : $x = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{i}$ et $y = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{j}$.

On considère un autre repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ avec $\overrightarrow{I} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{J} = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}$. Quelle sont les coordonnées $(X;Y)$ de $\overrightarrow{u}$ dans ce repère ?

2. Soit (C) la courbe du plan d'équation $x^2+y^2-2xy-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y=0$ (dans le repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$). Quelle est son équation dans le nouveau repère $\left(O; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ avec $\overrightarrow{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right)$ et $\overrightarrow{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right)$. Tracer (C).

$\boxed{\mathbf{6}}$ Soient A, B et M trois points de l'espace.

1. Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$ (où I est le milieu de $[AB]$).

En déduire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ (k constante réelle).

2. Simplifier MA^2+MB^2 en faisant intervenir le milieu I de $[AB]$.

En déduire l'ensemble des points M tels que $MA^2+MB^2 = k$ (k constante réelle).

3. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un réel donnés. Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{u} = k$?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Soient $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. Déterminer l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{x}$ tels que $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

$\boxed{8}$ **Distance d'un point à une droite**

Soit D la droite du plan P passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Soit M_0 un point de P. On appelle *distance de M_0 à D* la plus petite distance d de M_0 à un point de D.

1. Soit H le projeté orthogonal de M_0 sur D. Montrer que $d = HM_0$.

2. Montrer que $d = \dfrac{\left\|\overrightarrow{M_0A} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$.

Dans un repère orthonormé du plan, si M_0 a pour coordonnées (x_0, y_0) et si D a pour équation $ax + by + c = 0$ montrer que $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Application numérique : D est la droite intersection des plans d'équation $x + y - z = 0$ et $2x - z + 1 = 0$ et $M_0 \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right.$ (dans un repère orthonormé de E).

$\boxed{9}$ **Distance d'un point à un plan dans l'espace**

Soit P le plan de l'espace E passant par le point A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Soit M_0 un point de E et H sa projection orthogonale sur P.

1. Montrer que $\overrightarrow{AM_0}.(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{HM_0}.(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$. En déduire un expression de la distance du point M_0 au plan P.

2. On munit E d'un un repère orthonormé. Si P a pour équation $ax + by + cz + d = 0$ et M_0 pour coordonnées (x_0, y_0, z_0), montrer que $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Trois problèmes célèbres posés par les grecs : la quadrature du cercle, la duplication du cube et la trisection de l'angle. Ils consistent à construire à la règle et au compas respectivement un carré ayant même aire qu'un disque donné, l'arête d'un cube ayant un volume double d'un cube donné et les deux demi-droites partageant un angle donné en trois angles égaux. Ils ont été posés au cinquième siècle avant J.C. et il faudra attendre 24 siècle pour prouver que ces constructions sont impossibles : en 1837 Pierre Laurent Wantzel (1814-1848) le prouve pour les deux dernières constructions et en 1882 Ferdinand Lindemann (1852-1939), en montrant que π est transcendant, prouve qu'il en est de même de la première.