Primitives usuelles

$\boxed{1}$ Déterminer les primitives suivantes :

a/ $\displaystyle\int \frac{\ln t}{t}dt$; **b/** $\displaystyle\int \cos t \sin t dt$; **c/** $\displaystyle\int \tan t dt$; **d/** $\displaystyle\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx$; **e/** $\displaystyle\int x\arctan(x)\,dx$;

f/ $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt$; **g/** $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x)}$;**h/** $\displaystyle\int e^t \cos t dt$; **i/** $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{(x^3+1)^3}}dx$; **j/** $\displaystyle\int (2x+3)^5\,x dx$; **k/** $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+x+1}$.

$\boxed{2}$ Déterminer les primitives suivantes en intégrant par parties :

a/ $\displaystyle\int t\arctan t dt$; **b/** $\displaystyle\int t\sin^3 t dt$; **c/** $\displaystyle\int (t-1)\sin t dt$; **d/** $\displaystyle\int (t^2-t+1)\,e^{-t}dt$.

$\boxed{3}$ Calculer les intégrales suivantes :

a/ $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt$; **b/** $\displaystyle\int_1^e t^n \ln t dt$; **c/** $\displaystyle\int_0^1 \arctan t dt$; **d/** $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin t dt$; **e/** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mt)\sin(nt)\,dt$ $(m,n\in\mathbb{N})$;**f/** $\displaystyle\int e^x\cos(2x)\,dx$; en déduire $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x\cos^2 x dx$ et $J=\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x dx$.

$\boxed{4}$ Déterminer les primitives suivantes en utilisant le changement de variables indiqué :

a/ $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ $(u=\sqrt{t})$; **b/** $\displaystyle\int \frac{\ln t dt}{t+t\ln^2 t}$ $(u=\ln t)$; **c/** $\displaystyle\int \frac{e^{2t}dt}{e^t+1}$ $(u=e^t)$; **d/** $\displaystyle\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ $(u=\sqrt{t^2-1})$; **e/** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$ $(t=\sin u)$; **f/** $\displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}dt$ $(u=t^2)$.

$\boxed{5}$ Calculer $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{1+t}}dt$ de trois façons : 1/ en intégrant par parties; 2/ en posant $u=\sqrt{1+t}$; 3/ en écrivant $t=(t+1)-1$.

$\boxed{6}$ **Règle de Bioche**

Soit à calculer $\displaystyle\int F(\cos x,\sin x)\,dx$ où F désigne une fraction rationnelle. On utilise la

Règle de Bioche : si *l'élément différentiel* $\varphi(x)=F(\cos x,\sin x)\,dx$ est invariant par le changement de :

* x en $-x$ on pose $t=\cos x$;
* x en $\pi-x$ on pose $t=\sin x$;
* x en $x+\pi$ on pose $t=\tan x$.

Si $\varphi(x)$ n'est invariant par aucune de ces transformations on pose $t=\tan(x/2)$.

Vérifier que l'on a alors : $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$ et $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

Dans tous les cas on se ramène à calculer la primitive d'une fraction rationnelle en t.

Exemples : $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$; $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$; $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$; $\displaystyle\int \frac{\tan x dx}{1+\sin^2 x+\cos x}$.

$\boxed{7}$ On pose pour tout entier naturel n : $K_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$.

1. Calculer K_0 et K_1 puis $K_n + K_{n+2}$ pour tout entier n.

En déduire l'expression de K_n en fonction de n avec un "sigma".

2. Montrer que la suite (K_n) tend vers 0. En déduire que :

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) \quad \text{et} \\ \frac{\pi}{4} &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n}}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

$\boxed{8}$ Suites et intégrales :

a/ Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$; trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1};

b/ calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x dx$ (on donnera un sens à cette intégrale).

$\boxed{9}$ f est une fonction continue sur un intervalle I.

1. Si f est paire sur $I = [-a, a]$ $(a > 0)$ montrer que $\displaystyle\int_0^a f(t)\, dt = \int_{-a}^0 f(t)\, dt$.

En déduire que $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\, dt = 2\int_0^a f(t)\, dt$. Interpréter graphiquement.

2. Si f est impaire sur $I = [-a, a]$ $(a > 0)$ montrer que $\displaystyle\int_0^a f(t)\, dt = -\int_{-a}^0 f(t)\, dt$.

En déduire que $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\, dt = 0$. Interpréter graphiquement.

3. Soit f périodique de période $T > 0$ sur $I = \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\, dt$ ne dépend pas de a (on commencera par prouver que $\displaystyle\int_0^a f(t)\, dt = \int_T^{a+T} f(t)\, dt$).

Interpréter graphiquement.

$\boxed{10}$ Sans calculer d'intégrales montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Retrouver ce résultat en calculant ces intégrales.