Corrigé

Idée générale : on considère une fonction f continue sur un intervalle $[a,b]$ et on veut calculer une valeur approchée de $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. Pour cela on considère une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de l'intervalle $[a,b]$ ($x_0 = a$, $x_n = b$) et on approche sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ $(0 \leq i \leq n-1)$ la fonction f par des fonctions polynômes P_i et l'intégrale de f sur $[x_i, x_{i+1}]$ par l'intégrale de P_i. On prendra donc pour valeur approchée de I :

$$I \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(t)\,dt, \text{ l'erreur étant } e = \left| I - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(t)\,dt \right|.$$

Montrer que : $e \leq \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(t) - P_i(t))\,dt \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t) - P_i(t)|\,dt$.

Dans la suite on prendra une subdivision régulière si bien que $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}(0 \leq i \leq n-1)$ et $x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n}$.

$\boxed{1}$ Méthode des rectangles

Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on approche la fonction f par la fonction constante (i.e le polynôme P_i est de degré 0) : $f(\xi_i)$ où $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ l'intégrale de f est donc remplacée par $(x_i - x_{i+1}) f(\xi_i)$ (aire du rectangle de base ξ_i de hauteur $f(\xi_i)$) et une valeur approchée de I est donc :

$$\boxed{R_n = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) = \tfrac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)}.$$

Majoration de l'erreur. On suppose f de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer que pour tout t de $[x_i, x_{i+1}]$ on a : $|f(t) - f(\xi_i)| \leq M_1 |t - \xi_i|$ où $M_1 = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f'(t)|$. En déduire que :

$$e = |R_n - I| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{n}.$$

On prend maintenant $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ = milieu de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Montrer que l'on a alors :

$$e = \left| I - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(m_i) \right| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{4n} \text{ (\textit{méthode du point médian})}.$$

On suppose f de classe C^2 sur $[a,b]$. Soit $M_2 = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f"(t)|$. Montrer que :

$$e = \left| I - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(m_i) \right| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$

(appliquer la formule de Taylor-Lagrange à f au point m_i).

$\boxed{2}$ Méthode des trapèzes

Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on approche maintenant la fonction f par la fonction affine (i.e le polynôme P_i est de degré 1) qui prend les même valeurs que f aux points x_i et x_{i+1}. P_i est donc le polynôme d'interpolation de Lagrange de f pour la subdivision (x_i, x_{i+1}).

Sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ l'intégrale de f est remplacée par $(x_{i+1} - x_i) \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$ (= aire du trapèze de bases $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$) et une valeur approchée de I est :

$$\boxed{T_n = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2f(x_1) + \dots 2f(x_{i-1}) + f(b)\right]}.$$

1. Montrer qu'il existe $\theta_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tel que $f(\theta_i) = \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$. La méthode des trapèzes apparaît donc comme une méthode particulière des rectangles.

   Majoration de l'erreur. On suppose f de classe C^2 sur $[a,b]$. Soit $M_2 = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f"(t)|$. Montrer que :

$$e = |I - T_n| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

(On rappelle que pour tout x et $[a,b]$ on a la majoration : $|f(x) - P_i(x)| \leq \frac{M_2}{2!} |(x - x_i)(x - x_{i+1})|$).

$\boxed{3}$ Méthode de Simson

Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on approche la fonction f par la fonction polynôme de degré 2, P_i, qui prend les même valeurs que f aux points x_i, $m_i = \frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ et x_{i+1} (P_i est donc le polynôme d'interpolation de Lagrange de f pour la subdivision (x_i, m_i, x_{i+1}). On rappelle que pour tout polynôme g de degré ≤ 3 on a la formule des 3 niveaux (voir feuille 21, I/) : $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt = \frac{b-a}{6}\left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)\right)$.

Montrer que I est alors approché par :

$$\boxed{S_n = \frac{b-a}{6n}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + f(b)\right]}.$$

Majoration de l'erreur :

a/ on suppose f de classe C^4 sur $[a,b]$. Soit $M_4 = \sup\limits_{t\in[a,b]} \left|f^{(4)}(t)\right|$. Déterminer le polynôme Q_i de degré ≤ 3 vérifiant : $Q_i(x_i) = f(x_i), Q_i(m_i) = f(m_i), Q_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ et $Q_i'(m_i) = f'(m_i)$.

b/ Montrer que $\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(t)\,dt = \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q_i(t)\,dt$.

c/ Pour $x \in [a,b] - \{x_i, m_i, x_{i+1}\}$ on pose $\varphi(t) = f(t) - Q_i(t) - \beta N(t)$ où $N(t) = (t - x_i)(t - m_i)^2 (t - x_{i+1})$, le réel β étant choisi tel que $\varphi(x) = 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\beta = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}$.

En déduire que $|f(x) - Q_i(x)| \leq \frac{M_4}{24} |N(x)|$ puis que :

$$\boxed{e = |I - S_n| \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{2880n^4}}.$$

$\boxed{4}$ Comparaison des méthodes

Soient R_n, T_n et S_n les valeurs approchées de I obtenues par les méthodes des rectangles (avec le point m_i), trapèzes et Simson.

Montrer que $S_n = \frac{T_n+2R_n}{3}$.