MATHS SUP Lycée Laetitia-Bonaparte Ajaccio

PTSI TD FONCTIONS : LIMITE ET CONTINUITE

$\boxed{1}$ Etudier la limite des fonctions suivantes au point a donné :

1/ $\dfrac{x^3+2x^2-3}{x-1}, a=1;$

2/ $\dfrac{x\sin x-x^2+1}{x+3}$, $a=+\infty;$

3/ $\dfrac{\cos x}{x}$, $a=+\infty;$

4/ $x\left(e^{1/x}+e^{2x}-2\right)$, $a=+\infty;$

5/ $\frac{\sin(1/x)}{e^{1/x}+1}$, $a=0;$

6/ $\frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x}$, $a=1;$

7/ $\dfrac{E(x)}{x}$, $a=+\infty,$

8/ $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$, $a=+\infty;$

9/ $x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $a=0;$

10/ $xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $a=0;$

11/ $e^{1/x}\sin x$, $a=0;$

12/ $\dfrac{2\sin x-1}{4\cos^2 x-3}$, $a=\frac{\pi}{6};$

13/ $\dfrac{2\tan x-\sin 2x}{\sqrt{2+x^3}-\sqrt{2-3x^2}}$, $a=0.$

$\boxed{2}$ Trouver la limite et des équivalents simples des fonctions aux points désignés :

1/ $\dfrac{\ln(1+x-3x^2)}{2x+x^3}$ en 0;

2/ $\tan x-\sin x$ en 0;

3/ $\dfrac{\ln(1+\tan x)}{e^{\sin x}-1}$ en 0;

4/ $\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{3x^2}$ en 0;

5/ $\dfrac{1}{\sqrt{2+3x}}-\dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$ en 0;

6/ $f(x)=\ln\left[\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right]$ au voisinage de $+\infty$ (montrer que $f(x)\sim\dfrac{1}{x\ln x}$);

7/ $\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin x}$ en 0;

8/ $(x^2+x-2)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ en 1^-.

$\boxed{3}$ **1/** Soient f et g sont deux fonctions telles que $f\sim g$ en a. A-t-on : $\ln(f)\sim\ln(g)$? Donner un contre exemple.

Montrer que si $f\sim g$ et si f ou g a une limite l égale à 0 ou à $+\infty$ alors on a :

$$f\sim g\Longrightarrow\ln(f)\sim\ln(g).$$

Exemple : $\ln(x+\sin x) \sim \ln x$ en $+\infty$.

2/ Soient f et g sont deux fonctions telles que $f \sim g$ en a. A-t-on : $e^f \sim e^g$ en a ?
Donner un contre-exemple.
Si $f \sim g$ a quelle condition a-t-on $e^f \sim e^g$?

$\boxed{4}$ Etudier la continuité des applications suivantes : **1/** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+e^{1/x}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$;

2/ $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{x} \text{ si } x < -1 \\ \sqrt{1-x^2} \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1-x}{x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$; **3/** $j(x) = [x] + (x-[x])^2$.

$\boxed{5}$ Peut-on prolonger par continuité en 0 la fonction f telle que $f(x) = x\cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)$? Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{6}$ Etudier les variations des fonctions suivantes :
(i) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$; **(ii)** $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-2x-3}{x^2-3}$ (montrer qu'il y-a une asymptote oblique dont on donnera une équation); **(iii)** $f(x) = (x-1)\,e^{\frac{x}{x-1}}$.

$\boxed{7}$ On cherche les fonctions f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \ (*)$$

On pose $f(1) = a$. Soit f une fonction vérifiant (*).

1/ Montrer que $f(0) = 0$ puis que f est impaire.

2/ Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel x on a : $f(nx) = nf(x)$, et que $f(n) = na$. Montrer que pour tout rationnel x on a $f(x) = ax$ (*indication* : commencer par montrer que $f\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{a}{q}$ pour $q \in \mathbb{N}^*$.

3/ En déduire que pour tout réel x on a : $f(x) = ax$ (*indication* : considérer une suite de rationnels tendant vers x).

$\boxed{8}$ **1/** Montrer que l'identité de $\mathbb{R}$ et la fonction nulle sont les seules fonctions f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(xy) = f(x)\,f(y).$$

2/ Reprendre la question précédente sans l'hypothèse "f continue" (*indication* : montrer que f est croissante et s'inspirer du VII/).

$\boxed{9}$ Soit une fonction $f : [a;+\infty[\to \mathbb{R}$ croissante et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $]a;+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Montrer que si g est croissante alors f est constante.

La notion de fonction : le terme a été introduit par Leibniz en 1692 et généralisée par Bernoulli en 1698. Frechet donne en 1905 la définition la plus générale d'une fonction dans laquelle la variable et la fonction prennent des valeurs dans un ensemble quelconque. Cauchy en 1821 donne la définition moderne de la continuité. Riemann donne le premier l'exemple d'une fonction continue et dérivable nulle part.