$\boxed{1}$ Ecrire les matrices $A$ des applications linéaires suivantes dans les bases proposées :

**1.** $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui à $(x, y, z)$ associe $(x + y + z, x - y + z, x + 2z)$; bases canoniques de $\mathbb{R}^3$;

**2.** $s : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$ (vecteurs de l'espace), symétrie orthogonale par rapport au plan $P$ d'équation $x + y - z = 0$ (dans une base orthonormée directe $(b) = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k},\right)$). Ecrire ensuite la matrice de $s$ dans une base mieux adaptée;

**3.** $v : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ qui à $P$ associe $P'$. Calculer $A^2, A^3, A^4$ et interpréter.

**4.** $w : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$, qui à $P$ associe $(X^2 + 1) P'$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et de $\mathbb{R}_3[X]$. Trouver $\ker w$, $\operatorname{Im} w$ et $rgw$.

$\boxed{2}$ Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, somme directe de deux sous-espace vectoriel $F$ et $G$ et $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$.

**1.** Trouver une base de $E$ dans lesquelles la matrice $M$ de $p$ soit "simple".

Vérifier que $MM = M$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Soit $s$ la symétrie part rapport à $F$ parallèlement à $G$.

**2.** Trouver une base de $E$ dans lesquelles la matrice $S$ de $s$ soit "simple".

Vérifier que $S^2 = I_n$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

$\boxed{3}$ Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$ tel que $u^2 = -Id_E$.

**1.** Montrer que $u$ est bijectif.

**2.** Montrer que si les $2p - 1$ vecteurs $x_1, x_2, ..., x_p, u(x_1), ..., u(x_{p-1})$ sont libres sont libres il en est de même des $2p$ vecteurs $x_1, x_2, ..., x_p, u(x_1), ..., u(x_p)$.

**3.** En déduire que la dimension de $E$ est paire et que $E$ possède une base $(x_1, x_2, ..., x_p, u(x_1), ..., u(x_p))$. Trouver la matrice de $u$ dans cette base.

$\boxed{4}$ Dans $\mathbb{R}^3$ trouver la matrice de passage $P$ de la base canonique à la base $f_1 = (0, 1, 1)$, $f_2 = (1, 0, 1)$, $f_3 = (1, 1, 0)$. Calculer $P^{-1}$.

Trouver les composantes de $V = (1, 2, -1)$ dans la nouvelle base $(f_1, f_2, f_3)$.

$\boxed{5}$ Soit $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit $B' = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la base de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$f_1 = e_1 - e_2, f_2 = e_2 - e_3, f_3 = e_3 - e_4, f_4 = e_4.$$

**1.** Vérifier que $B'$ est bien une base de $\mathbb{R}^4$.

**2.** Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice associée à une application linéaire $u$ de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même, muni de la base $B$. Trouver la matrice de $u$ dans la base $B'$.

$\boxed{6}$ Soit $u$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par rapport aux bases canoniques $(e_1, e_2, e_3)$ et $(f_1, f_2)$ par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

**1.** On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_3 + e_1$, $e'_3 = e_1 + e_2$.

Quelle est la matrice de $u$ dans les bases $(e'_1, e'_2, e'_3)$ et $(f_1, f_2)$ ?

**2.** On choisit ensuite pour base de $\mathbb{R}^2$ la base $f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$, $f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$ en gardant dans $\mathbb{R}^3$ la base $(e'_1, e'_2, e'_3)$. Quelle est la matrice de $u$ dans ces bases ?

$\boxed{7}$ Montrer que l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Préciser sa dimension et en donner une base.

$\boxed{8}$ Inverser les matrices suivantes :

**a/** $A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n-2}{1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix}$ (indication : considérer l'application $P \longmapsto P(X+1)$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$);

**b/** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (montrer que $C^2 - 4C + 3I_2 = 0$);

$\boxed{9}$ Soit $M = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre $n$.

On appelle *trace* de $M$ le scalaire $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ (ie la somme de ses éléments diagonaux de $M$).

**1.** Montrer que pour tout scalaire $\lambda$ et toutes matrices carrées $M$ et $N$ d'ordre $n$ on a: $\mathrm{Tr}(\lambda M) = \lambda \mathrm{Tr}(M)$, $\mathrm{Tr}(M+N) = \mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(N)$ et $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$.

Montrer que deux matrices semblables ont même trace.

**2.** Soit $u$ un endomorphisme de $E$, espace vectoriel de dimension $n$.

Comment peut-on définir la trace de $u$ ?

**3.** Quelle est la trace de $f$, projection sur $F$ parallèlement à $G$, sous-espaces vectoriels de $E$ de dimension $p$ et $q$ ?

Même question avec $s$, symétrie vectorielle par rapport à $F$ parallèlement à $G$.

$\boxed{10}$ La matrice obtenue à partir de la matrice identité $I_n$ en multipliant la $i$-ième ligne par $\lambda$ s'appelle *matrice de dilatation* et de note $D_i(\lambda)$.

La matrice obtenue à partir de la matrice identité $I_n$ en échangeant la $i$-ième ligne et la $j$-ième ligne $(i \neq j)$ s'appelle *matrice de permutation* et de note $P_{i,j}$.

La matrice $I_n + \lambda E_{i,k}$ $(i \neq k)$ s'appelle *matrice de transvection* et se note $T_{i,k}(\lambda)$.

Les matrices$D_i(\lambda), P_{i,j}$ et $I_n + \lambda E_{i,k}$ sont inversibles car elle se ramènent à la matrice identité par une opération élémentaire sur les lignes.

**1.** Soit $M$ une matrice carrée $(n, n)$. Montrer que effectuer

- $D_i(\lambda) M$ revient à multiplier la $i$-ième ligne de $M$ par $\lambda$;
- $P_{i,j}M$ revient à échanger les lignes $i$ et $j$;
- $T_{i,k}(\lambda) M$ revient à ajouter à la $i$-ème ligne, $\lambda$ fois la $k$-ième.

En déduire qu'il existe une matrice $P$ inversible telle que $PM$ soit échelonnée par lignes.

**2.** En considérant les produits à droite $MD_i(\lambda)$, $MP_{i,j}$ et $MT_{i,k}(\lambda)$ monter de même qu'il existe une matrice $P'$ inversible telle que $MP'$ soit échelonnée par colonnes.