Correction

E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension n. On note $x.y$ le produit scalaire de x et y.

1. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

Montrer que les coordonnées $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ d'un vecteur x dans cette base sont donnés par :

$$x_k = x.e_k \text{ pour } 1 \leq k \leq n.$$

2. Une matrice carrée M de type (n,n) est dite *orthogonale* ssi $M.{}^tM = I_n$.

a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{O}(n)$ des matrices orthogonales de type (n,n) est un sous-groupe du groupe des matrices inversibles d'ordre n.

Montrer que si M est orthogonale, ${}^tM$ aussi.

Si M est orthogonale montrer que $\det M = \pm 1$. La réciproque est-elle vraie ?

b. Montrer qu'une matrice M est orthogonale ssi ses colonnes forment un système orthonormé dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Même question en remplaçant "colonnes" par "lignes".

3. Un endomorphisme u de E est une *isométrie* ssi il conserve la norme des vecteurs, i.e. :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$

Soit u un endomorphisme de E et B une bas orthonormée de E.
Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est une isométrie;

(ii) u conserve le produit scalaire, i.e. : $\forall (x,y) \in E^2$, $u(x).u(y) = x.y$;

(iii) u transforme B en une base orthonormée de E;

(iv) la matrice de u dans B est une matrice orthogonale.

4. Montrer que la matrice d'une isométrie u de $\mathbb{R}^2$ (muni de son produit scalaire canonique) est de l'un des types suivant :

$$\textbf{(I)} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2+b^2=1; \textbf{(II)} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2+b^2=1.$$

Montrer que dans le cas **(I)** u est une rotation, et dans le cas **(II)** c'est la matrice d'une symétrie orthogonale à préciser.

5. *Exemple* : dans un espace euclidien muni d'une base orthonormée directe $B = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ on considère le vecteur normé $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$.

Soit D la droite vectorielle orientée par $\overrightarrow{n}$ et P le plan orthogonal à D. Soient p et q les projections orthogonales sur D et P respectivement.

a. Montrer que : $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3, p(\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$.

b. Déterminer les matrice de p et q dans la base B en fonction de a, b et c.

c. Soient S_D et S_P les symétries orthogonales par rapport à D et P respectivement.

Trouver les matrices de S_D et S_P dans la base B.