Au delà du réel, l'aventure continue.
Anonyme

Résumé Nombres complexes

L'esprit divin s'est manifesté de façon sublime dans cette merveille de l'analyse, ce prodige d'un monde idéal, cet intermédiaire entre l'être et le non-être, que nous appelons la racine imaginaire de l'unité négative.
Gottfried Leibniz

$\boxed{1}$ **1.** Trouver la forme algébrique et le module de **a/** $\dfrac{3-2i}{4+5i}$; **b/** $(1+2i)^4$; **c/** $\dfrac{(2-i)(5+2i)}{3-3i}$.

2. Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexes : **a/** $1-\sqrt{2}$; **b/** $-5i$; **c/** $1-\sqrt{2}i$; **d/** $2-i$; **e/** $\left(\sqrt{3}+3i\right)^{19}$; **f/** $\dfrac{1+2i}{3+4i}$.

$\boxed{2}$ Trouver l'ensemble des nombres complexes z tels que $z' = (z-1)(z-2i)$ soit :
(i) réel; **(ii)** imaginaire pur.
Mêmes questions avec $z' = \dfrac{z+2i}{z-2}$.

$\boxed{3}$ Démontrer que pour tous nombres complexes z on a :

$$z \text{ réel} \Longleftrightarrow \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1.$$

Interpréter géométriquement.

$\boxed{4}$ Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\alpha)$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\alpha)$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\alpha)}{\cos^k \alpha}$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k\alpha)}{\cos^k \alpha}$.

$\boxed{5}$ Montrer que $|z+z'| = |z| + |z'| \Longleftrightarrow (z=0 \text{ ou } z'=0 \text{ ou } \arg z \equiv \arg z' \ (2\pi))$.
En donner une preuve géométrique.

$\boxed{6}$ Prouver que pour tous nombres complexes z et z' on a :

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right). \text{ Interprétation géométrique.}$$

$\boxed{7}$ Soit f l'application de $\mathbb{C} - \{2\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{z+2i}{z-2}$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C} - \{2\}$ dans un ensemble que l'on précisera. Exprimer f^{-1}. Déterminer $f(\mathbb{R} - \{2\})$, $f(i\mathbb{R})$, $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(i\mathbb{R})$, $f(U)$, $f^{-1}(U)$ (où U désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1).

$\boxed{8}$ Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

(a) les points $A(1)$, $M(z)$ et $N(z^2)$ soient alignés ;

(b) les points $A(1)$, $M(z)$, $M'(z^{-1})$, et $M"(1-z)$ soient cocycliques ou alignés;

(c) $\left(\dfrac{z-1-i}{iz+1}\right)^2$ réel ;

(d) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = 0$.

$\boxed{9}$ **1.** Simplifier l'écriture de $Z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$.
2. Module et argument de $\left(1 + e^{ia}\right)^n$ (a réel et n entier naturel donnés).

$\boxed{10}$ Développer pour $z \in \mathbb{C}$: $(z + |z|)^2$.
En déduire une expression des racines carrées de z pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$.

$\boxed{11}$ Déterminer les racines cubiques de $\dfrac{1+i}{\sqrt{3} - i}$.

$\boxed{12}$ Linéariser $\sin^3 x$; $2\cos^4 x \sin^3 x$.

$\boxed{13}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a/ $(z+3)^3 = 3i$;
b/ $2z^2 - (1+5i)\, z - 2\,(1-i) = 0$;
c/ $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^4 = 1$;
d/ $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$;
e/ $z^4 - iz^3 - z^2 + iz + 1 = 0$;
f/ $\left(z^2+1\right)^n - (z+1)^{2n} = 0$;
g/ $z^n = \overline{z}$;
h/ $4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3\left(3 + i\sqrt{3}\right) z - 4 = 0$ (montrer qu'il y-a une racine réelle).

$\boxed{14}$ Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P = 1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$).
En déduire que : $\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right).\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)...\sin\left(\dfrac{(n-1)\,\pi}{n}\right) = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

$\boxed{15}$ On cherche les nombres complexes a, b et c de module 1 tels que $a + b + c = 1$ et $abc = 1$.

Montrer que pour tout nombre complexe z on a $(z-a)(z-b)(z-c) = z^3 - z^2 + z - 1$. En déduire les valeurs de a, b et c.

$\boxed{16}$ Etudier les suites réelles (a_n) et (b_n) définies par $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n^2 + b_n^2}$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{a_n^2 + b_n^2}$ (a_0 et b_0 donnés).

(*indication* : on pourra étudier la suite complexe (z_n) définie par $z_n = a_n + ib_n$).

Nombres complexes : ils furent introduits au XVIe siècle. Cardan remarque que les formules de Tartaglia pour l'équation du troisième degré $x^3 = 15x + 4$ donnent $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ alors que la solution évidente est $x = 4$. Bombelli remarque toutefois que comme $\left(2 \pm \sqrt{-1}\right)^3 = 2 \pm \sqrt{121}$, l'expression précédente s'écrit $x = \left(2 + \sqrt{-1}\right) + \left(2 - \sqrt{-1}\right) = 4$, ce qui redonne la solution exacte.

En 1637 Descartes qualifia d'"imaginaires" des expressions dans lesquelles figurent des racines carrées de nombres négatifs et il considérait que l'apparition d'une telle expression était la preuve qu'on était en présence d'un problème impossible. Les mathématiciens ont cependant continué a les utiliser. En 1673 John Wallis les représente comme un point d'un plan. Cette idée fut reprise par Jean-Robert Argand en 1806, puis par Gauss en 1811. C'est William Rowan Hamilton en 1837 qui formalise la notion de nombre complexe et leur donne un statut indiscutable au même titre que les nombres réels. Si l'existence des nombres complexes a été un temps discutée, leur domaine d'application est lui considérable aussi bien en mathématiques qu'en physique : aérodynamique, mécanique des fluides, mécanique quantique, électronique ...