Corrigé

But du problème : approcher une fonction f sur un intervalle $[a,b]$ par une fonction polynôme.

Plus précisément on choisit une subdivision de $n+1$ points $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de $[a,b]$ et on considère le polynôme P de degré $\leq n$ (dont on établit l'existence et l'unicité) qui prend les même valeurs que f en ces points. On donne ensuite une majoration de $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)|$.

Dans les quatre questions suivantes on considère $n+1$ scalaires distincts deux à deux $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et $n+1$ scalaires quelconques $v_0, v_1, \ldots v_n$.

On considère le problème suivant :

$$\boxed{\text{Trouver les polynômes } P \text{ de } K_n[X] \text{ vérifiant } P(\alpha_i) = v_i \text{ pour } 0 \leq i \leq n. \ \textbf{(*)}}$$

1. Montrer que si P existe il est unique.

2. Soit Φ l'application de $K_n[X]$ dans K^{n+1}définie par :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} K_n[X] & \longrightarrow & K^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(\alpha_0), \ldots, P(\alpha_n)) \end{array}.$$

a. Montrer que Φ est linéaire et injective. Que peut-on en déduire pour Φ ?

b. En déduire qu'il existe une unique solution au problème (*).

3. Trouver le polynôme L_i (pour $i \in \{0, \ldots, n\}$) tel que

$$L_i(\alpha_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ si } j \neq i \end{cases}$$

En déduire la solution du problème (*) (chercher P comme combinaison linéaire des L_i).

4. Que peut-on dire de la famille (L_i) $(0 \leq i \leq n)$ pour l'espace vectoriel $K_n[X]$?

Trouver un produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que la famille $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ soit orthonormée ($K = \mathbb{R}$).

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [a,b]$ et $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $n+1$ points fixés de I et deux à deux distincts. L'unique polynôme P_n de degré $\leq n$ tel que $P_n(\alpha_i) = f(\alpha_i)$ pour tout i de $\{0, \ldots, n\}$ s'appelle *polynôme d'interpolation de Lagrange de f relativement à la subdivision* $(\alpha_i)_{0\leq i\leq n}$.

5. On suppose f de classe C^{n+1} sur I. Montrer que si $M_{n+1} = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$ on a pour tout x de I :

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)|.$$

(*Indication* : pour x fixé distinct de $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ considérer l'application $\varphi(t) = f(t) - P_n(t) - k(t-\alpha_0)(t-\alpha_1)\ldots(t-\alpha_n)$, k étant choisi tel que $\varphi(x) = 0$, et montrer que φ s'annule $n+2$ points distincts).

6. *Programmation* : écrire en Maple une procédure l qui étant donnés une liste $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, un entier $k \in \{1, \ldots, n\}$ et un réel x calcule $L_k(x)$ (voir question 3.).

Ecrire ensuite une procédure (utilisant la procédure précédente) qui étant donnés une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ et une liste $L = [\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, trace dans un même repère les graphiques de f et de P_n (polynôme d'interpolation de Lagrange de f relativement à la subdivision L) sur $[a, b]$.

Expérimenter avec la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ sur $[-5, 5]$et observer les « effets de bord ». Comment choisir la subdivision pour atténuer ces effets ?