$\boxed{1}$ Une urne contient 15 boules : une noire, 5 blanches et 9 rouges.

1. On tire simultanément au hasard trois boules de cette urne. Calculer la probabilité des événements suivants :

a. A "le tirage est tricolore";

b. B "parmi les boules tirée figurent exactement une noire et au moins une rouge";

c. C "les trois boules tirées sont de la même couleur".

2. Mêmes questions si le tirage s'effectue successivement avec remise.

$\boxed{2}$ – **Anniversaires** : soit une classe à n élèves.

1. Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux élèves soient nés le même jour ?

2. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un élève est né le même jour que le professeur ?

$\boxed{3}$ **Problème du chevalier de Méré** : au jeu de dé comparer la probabilité d'obtenir au moins un as en jetant un dé 4 fois et la probabilité d'obtenir au moins un double as en jetant deux dés en 24 coups.

(Ce problème, résolu par Pascal, serait à l'origine du calcul des probabilités).

$\boxed{4}$ **Monty Hall** (du nom d'un présentateur de télévision).

Lors d'un jeu télévisé, le candidat fait face à trois portes fermées. Une voiture se trouve derrière une d'entre elles, et rien derrière les deux autres. Le candidat désigne une des portes, sans l'ouvrir. Le présentateur, qui sait où se trouve la voiture, ouvre alors une des deux autres portes derrière laquelle il n'y a rien.

Il y a deux stratégies pour le candidat : soit il maintient son choix initial soit il le change.

Un stratégie est-elle meilleure que l'autre ?

$\boxed{5}$ Un avion quadri-réacteur a besoin de deux moteurs pour pouvoir voler. Un avion bi-réacteur a besoin d'un moteur pour voler. La probabilité de panne d'un réacteur lors d'un vol transatlantique est p. On suppose que les pannes des réacteurs sont indépendantes les unes des autres.

Quel avion vous semble le plus sûr ?

$\boxed{6}$ Une loterie se déroule une fois par semaine. Sur 100 billets, k sont gagnants ($k \leq 90$).

On dispose de 10 euros et chaque billet coûte 1 euro.

Deux stratégies sont possibles : (A) on achète 10 billets en une seule fois; (B) on achète un billet pendans 10 semaines.

Quelle est la meilleure stratégie pour avoir au moins un billet gagnant ?

Probabilités conditionnelles

$\boxed{7}$ Une compagnie d'assurance automobile a classé ses assurés en trois classe d'âge. Le tableau ci-dessous fournit la proportion d'assurés d'une classe d'âge donnée et la probabilité qu'un assuré de d'une classe donnée déclare au moins un accident dans l'année :

Classes	Proportion	Probabilité
1 : moins de 25 ans	$0,25$	0.12
2 : de 25 à 50 ans	$0,53$	$0,06$
3 : plus de 50 ans	$0,22$	$0,09$

1. Un assuré est tiré au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait déclaré au moins un accident dans l'année ?

2. Quelle est la probabilité qu'un assuré ayant déclaré au moins un accident dans l'année soit âgé d'au plus 25 ans ?

3. Quelle est la probabilité pour qu'un assuré âgé de 25 ans ou plus ait au moins un accident dans l'année ?

4. Quelle est la probabilité pour qu'un assuré n'ayant déclaré aucun accident soit âgé de 25 à 50 ans ?

$\boxed{8}$ On considère trois urnes : U_1 contient $\left\{\begin{array}{l}\text{2 boules noires}\\ \text{3 boules rouges}\end{array}\right.$, U_2 contient $\left\{\begin{array}{l}\text{1 boules noires}\\ \text{4 boules rouges}\end{array}\right.$, U_3 contient $\left\{\begin{array}{l}\text{3 boules noires}\\ \text{4 boules rouges}\end{array}\right.$.

On tire une boule dans U_1 et une boule dans U_2 et les met dans U_3. On tire une boule de U_3, elle est noire.

Quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

$\boxed{9}$ Une particule se déplace à chaque seconde d'un sommet à l'autre du triangle ABC selon le protocole suivant :

- lorsqu'elle est en A, elle se fixe l'instant suivant en B avec la probabilité de 0.75 et en C avec la probabilité de 0.25;

- lorsqu'elle est en B, elle se fixe l'instant suivant en A avec la probabilité de 0.75 et en C avec la probabilité de 0.25;

- lorsqu'elle est en C, elle se fixe systématiquement en B à l'instant suivant.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, a_n, b_n et c_n les probabilité pour qu'à l'instant n la particule se situe en A, B ou C.

1. Déterminer une relation de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n.

2. En déduire l'existence d'une matrice carrée de type $(3,3)$ telle que $X_{n+1} = MX_n$, où on note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Soit P la matrice $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1}MP$.

4. En déduire en fonction de n l'expression de M^n puis de a_n, b_n et c_n.

5. Calculer les limites des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n).

$\boxed{10}$ On obtient "face" avec une pièce A avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

Un pièce B donne "face" avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.

On choisit une des pièces au hasard. On la lance. Si on obtint "face" on conserve la pièce que l'on vient de lancer sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers.

Quelle est la probabilité d'obtenir "face" au n-ième lancer ?

$\boxed{11}$ Un buveur impénitent décide d'essayer de ne plus boire. S'il ne boit pas un jour donné, alors la probabilité qu'il ne boive pas le lendemain est de $0,4$. S'il succombe à la tentation un jour, alors le remords fait que la probabilité qu'il ne boive pas le lendemain monte à $0,8$.

1. Quelle est la probabilité que ce buveur ne boive pas le n-ième jour ?

2. Que se passe-t-il lorsque $n \longrightarrow \infty$?