$\boxed{1}$ On rappelle qu'une suite (u_n) est *géométrique* si : $\exists q \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$.
Le réel q (indépendant de n) s'appelle *raison* de la suite (u_n).
Le n-ième terme d'une suite géométrique de raion q est : $u_n = u_0 \times q^n$ (ou : $u_1 \times q^{n-1} \ldots$)
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{R} \backslash \{1\}, \ 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
En déduire que la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ s'écrit

$$S = \frac{1^{er}\text{terme} - q \times \text{dernier terme}}{1 - q}$$

2. *Applications* :
a. Calculer, pour $x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$: $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.
En déduire que pour x réel :

$$|x| \leq \frac{1}{2} \implies \left| \frac{1}{1-x} - \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^n\right) \right| \leq 2 \, |x|^{n+1}.$$

b. Calculer, pour $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$ et $n \in \mathbb{N}$: $1 + x^2 + \ldots + x^{2n}$.
c. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n}$.

$\boxed{2}$ **Suites arithmético-géométriques**
Pour $q \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ on pose $f(x) = qx + a$.
Soit la suite (x_n) définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = qx_n + a$.
1. Calculer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (α est appelé *point fixe* de f).
2. Montrer que la suite $(x_n - \alpha)$ est une suite géométrique de raison q.
En déduire x_n en fonction de α, q, a et n.
Exemple : calculer le n-ième terme de la suite (x_n) définie par :

$$x_0 = 1 \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = 3x_n - 1.$$

$\boxed{3}$ **1.** Soit A un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers la borne supérieure de A. (Indication : utiliser la propriété de la borne supérieure en prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$).
2. Montrer que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels (Indication : utiliser le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: Td Nombres réel, exercice 2).

$\boxed{4}$ Etudier les limites des suites :
a. $\dfrac{3n^2 + 2n - 1}{5n + 3}$;
b. $\dfrac{5n^4 + 2n^3 + 1}{n^3 + n^2 + 2}$;

c. $\dfrac{2n^2+(-1)^n}{3n^2+(-1)^n}$;

d. $\dfrac{n^2+\cos n}{2n^2+\sin n}$;

e. $\dfrac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$;

f. $\dfrac{2^n+n^{100}}{2^n-n^{99}}$;

g. $\dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

$\boxed{5}$ **Différentes façons d'étudier la suite** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Montrer que (u_n) est croissante.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. *Comparaison avec une intégrale* : montrer que pour tout entier naturel $k > 0$ on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

Interpréter graphiquement cet encadrement.
En déduire un encadrement de (u_n) et conclure. Donner un équivalent simple de (u_n).

$\boxed{6}$ **Différentes façons d'étudier la suite** $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$ on a $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. En déduire une majoration de (v_n). En déduire que (v_n) est convergente et donner un encadrement de la limite.

2. Etudier la convergence de (v_n) en comparant avec une intégrale (s'inspirer de l'exercice précédent).

$\boxed{7}$ **Suites géométriques :**
Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel $a \geq 0$:

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

En déduire l'étude de la convergence d'une suite géométrique de raison q suivant les valeurs de q.

$\boxed{8}$ **Comparaison avec une suite géométrique :**

1. Soit (v_n) une suite convergente vers un réel $l > 1$. Montrer qu'il existe un réel $l' > 1$ et un entier naturel N tel que pour tout entier $n \geq N$ on ait $v_n \geq l'$.

Enoncer et démontrer une propriété analogue pour $0 \leq l < 1$.

2. Soit (u_n) une suite de réels strictement positive telle que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Montrer que :

* Si $l > 1$ alors $\lim u_n = +\infty$;
* Si $l < 1$ alors $\lim u_n = 0$.

3. Mêmes résultat en remplaçant $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, par $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$.

4. *Applications* : étudier la convergence des suites suivantes :

$$\frac{n^7}{(1,01)^n}; \frac{a^n}{n^p}; \frac{a^n}{n!}; \frac{n^p}{n!}; \frac{n!}{n^3 4^n} \quad (a \text{ réel et } p \text{ entier naturel donné}).$$

Comparer les vitesses de convergence de a^n, n^p, $n!$ et n^n.

$\boxed{9}$ **Utilisations du théorème de comparaison :**

1. Limite de la suite définie par : $x_n = \dfrac{\ln(2+\cos n)}{n}$;

2. Pour $1 \le k \le n$, encadrer $\dfrac{n}{n^2+k}$ par deux expressions indépendantes de k; en déduire la limite de la suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$;

3. Prouver que si $x \ge 0$ on a : $x - \dfrac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$. En déduire la limite de la suite définie par : $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

4. Limite de la suite définie par : $w_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(kx)$.

$\boxed{10}$ Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$. On considère les suites définies par

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Etudier la convergence de (u_n) et (v_n) (on pourra étudier le sens de variation de (u_n) et (v_n) et considérer la suite (t_n) définie par $t_n = u_n - v_n$.

2. Soit la suite (w_n) définie par : $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. Montrer que (w_n) est toujours définie. Calculer w_n en fonction de w_0 et n et en déduire un expression de (u_n) et (v_n) en fonction de a, b et n.

$\boxed{11}$ Soit la suite (x_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+n}$.

1. Démontrer que la suite (x_n) est convergente.

2. Soit la suite (y_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $y_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + ... + \dfrac{1}{n+n}$. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes. Retrouver le résultat de la question précédente.

3. Montrer que pour tous entiers naturels non nuls k et n on a l'encadrement :

$$\frac{1}{n}.\frac{1}{1+\dfrac{k+1}{n}} \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \frac{dt}{t} \le \frac{1}{n}.\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}.$$

Retrouver que la suite (x_n) est convergente et calculer sa limite.

$\boxed{\textbf{12}}$ Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 < u_n < v_n$.

2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.

(l est appelée *moyenne arithmético-géométrique* de a et b).

3. a. Montrer que pour tous réels x et y tels que $0 < y \leq x$ on a :

$$0 \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \frac{x-y}{2\sqrt{y}}.$$

En déduire que pour tout entier naturel n on a :

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{(v_n - u_n)^2}{8a}.$$

b. On prend dans la suite $a = 1$ et $b = 2$.

Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{8^{2^n - 1}}.$$

4. Calcul numérique de l :

A l'aide de la calculatrice donner un rang N à partir duquel u_n et v_n sont des valeurs approchées de l à 10^{-10} près.

Histoire des mathématiques : la fonction zêta de Riemann, hypothèse de Riemann.

Elle est définie comme la limite de la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^z}$, notée $\xi(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^z}$. Cette fonction ξ est appelée fonction zêta de Riemann, et elle est définie dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Euler (mathématicien suisse, 1707-1783) calcule les valeurs de $\xi(2n)$ pour n entier; ainsi $\xi(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$. Par contre on ne sait pratiquement rien des réels $\xi(2n+1)$; à la surprise générale le français Roger Apéry a démontré en 1979 que le réel $\xi(3)$ est irrationnel. Cette fonction est très importante car elle est liée à la répartition des nombres premiers dans l'ensemble des nombres réels.

Riemmann a conjecturé que les zéros non triviaux de la fonction ξ ont tous une partie réelle égale à $1/2$. Malgré tous les efforts cette conjecture, appelés hypothèse de Riemann, n'a toujours pas été démontrée à l'heure actuelle.