Lois de probabilité, moments d'une VA

$\boxed{1}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n\}$ telle que $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, P(X = k) = \dfrac{a}{k+1}\dbinom{n}{k}$.

Déterminer a puis calculer l'espérance et la variance de X.

$\boxed{2}$ On lance simultanément deux dés à 6 faces. Soit Z la variable aléatoire égale à la valeur absolus de la différence des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de Z.

2. Calculer l'espérance et la variance de Z.

$\boxed{3}$ Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$).

On retire l'une après l'autre toutes les boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité pour que les trois boules $1, 2, 3$ soient sortent consécutivement dans cet ordre ?

2. Calculer la probabilité pour que les trois boules $1, 2, 3$ sortent dans cet ordre (consécutivement ou pas) ?

3. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaire pour obtenir les boules $1, 2, 3$. Déterminer la loi de X_n ainsi que son espérance.

Couple de variables aléatoires

$\boxed{4}$ Une urne contient une boule blanche, une verte et deux rouges. On extrait successivement les quatre boules de l'urne. On note X le rang d'apparition de la boule blanche et Y le rang d'appartion de la boule de la deuxième boule rouge.

Donner la loi du couple (X, Y) et les lois marginales de X et Y.

$\boxed{5}$ On considère le couple (X, Y) de variables aléatoires prenant la valeur (i, j) avec la probabilité donnée par le tableau suivant :

$X\backslash Y$	0	1	2	3
1	0,1	0,2	0,1	0,1
2	0,1	0	0	0,1
3	0,1	0	0,2	0

1. Vérifier la loi de (X, Y).

2. Déterminer les lois marginales de X et Y. Ces VA sont-elles indépendantes ?

3. Calculer l'espérance et la variance de X et Y.

4. Soit $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\}$. Former les tables des lois conditionnelles des variables $Y_{[X=i]}$ et $X_{[Y=j]}$.

5. Soit $U = X \times Y$. Déterminer la loi de U.

6. Soit $V = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de V.

7. Former la table de la loi conjointe de U et V.

$\boxed{6}$ Une urne contient N boules numérotées de 1 à N.

1. On prélève successivement et avec remise n boules de l'urne.

Soit X et Y les variables aléatoires égales au plus petit et au plus grand numéro obtenus.

a. Pour $x \in \{1, 2, \ldots, N\}$ calculer $P(X \geq x)$ et en déduire la loi de X.

b. Pour $y \in \{1, 2, \ldots, N\}$ calculer $P(Y \leq y)$ et en déduire la loi de Y.

c. Pour $(x, y) \in \{1, 2, \ldots, N\}^2$ calculer $P[(X > x) \cap (Y \leq y)]$ et en déduire la loi du couple (X, Y).

2. Mêmes questions avec un tirage simultané.

Lois usuelles

$\boxed{7}$ Dans une ville une proportion p de la population est atteinte par un virus contagieux. Si une personne saine est en contact avec une personne contaminée, il y a 2 chances sur 3 pour qu'elle soit contaminée.

Un représentant de commerce (en bonne santé) décide de rendre visite à n habitants de cette ville.

1. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de malades rencontrées par le représentant. Quelle est la loi de N ?

2. Quelle est la probabilité pour que le représentant soit contaminé à l'issue de sa tournée ?

$\boxed{8}$ On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour déceler la présence éventuelle d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec une probabilité de p. On dispose pour cela de deux méthodes :

– **Méthode 1 :** on analyse le sang de chacune des N personnes;

– **Méthode 2 :** on regroupe la population en g groupes de n individus. On collecte le sang des n individus de chaque groupe dans une même éprouvette. Si le résultat d'un groupe est positif, on procède alors à une analyse individuelle de ses membres.

1. Quelle est la loi de probabilité de la VA X égale au nombre de groupes positifs ?

2. Soit Y la VA égale au nombre d'analyses dans la deuxième méthode. Calculer $E(Y)$ en fonction de N, n et p.

3. Comparer les deux méthodes lorsque $N = 1000, n = 100$ et $p = 0,01$.

$\boxed{9}$ Le service après vente d'un hypermarché spécialisé dans la vente de matériel informatique dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Les interventions ont parfois lieu avec du retard. On admet que les appels ont lieu indépendamment les uns des autres et que pour chaque appel, la probabité d'un retard est de $0,25$.

1. Un client appelle le service à huit reprises. Soit X la VA égale au nombre de fois où le client a dû subir un retard.

a. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

b. Calculer la probabilité de l'événement "le client a subi au moins un retard".

c. Calculer la probabilité de l'événement "le client a subi moins de quatre retards".

d. Calculer la probabilité de l'événement "le client a subi moins de quatre retards sachant qu'il en a subi au moins un".

2. On considère un groupe de huit clients différents. Deux d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont dû subir un retard à la suite de leur appel. On contacte au hasard quatre parsonnes parmi ces huit. Soit Y la VA agale au nombre de clients mécontents parmi les quatre contactés.

a. Quel est la loi de probabilité de Y ?

b. Calculer l'espérance de Y.

$\boxed{10}$ **Marche aléatoire sur une droite**

Soit $p \in [0,1]$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine O. A chaque instant elle fait un bond d'une unité vers la droite ou d'une unité vers la gauche avec les probabilités respectives de p et $q = 1-p$. A l'instant initial la puce est à l'origine. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note X_n la VA égale à l'abscisse de la puce à l'instant n.

Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.

Probabilités : exemples d'univers infinis

$\boxed{\mathbf{11}}$ *Lois géométriques*

On lance une pièce plusieurs fois jusqu'à obtenir Pile. A chaque lancer, la pièce donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$. On gagne lorsque l'on obtient pile la première fois.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaire pour gagner.

1. Proposer un univers qui modélise l'expérience.

2. Calculer $P(X=k)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

3. Calculer son espérance, définie par $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k)$.

Remarque : si $p \in]0,1[$ la loi défini sur l'univers $\mathbb{N}^*$ par $P(\{k\}) = p(1-p)^{k-1}$ s'appelle *loi géométrique de paramètre p.*

$\boxed{\mathbf{12}}$ *Lois de Poisson*; *approximation de la loi binômiale*

Considérons par exemple le nombre N d'appels téléphoniques qui arrivent à un standard donné entre les dates 0 et T. On souhaite donc déterminer un modèle probabiliste qui décrivent $P(N=k)$ pour tout entier k.

On peut visualiser la situation de la façon suivante : le segment $[0,T]$ est un ensemble de points qui représentent toutes les dates possibles entre 0 et T et à chacune de ces dates le standard reçoit ou non un appel. On discrétise la situation réelle en subdivisant le segment $[0,T]$ en n intervalles de temps de durée $\frac{T}{n}$, plus n est grand et plus chacun de ces n intervalles, qui peuvent être assimilés à un point, auront des chances de ne contenir au plus un appel. Faisons l'hypothèse que chacun de ces petits intervalles a une probabilité p,proportionnelle à $\frac{T}{n}$ de recevoir un appel; notons la $p = \frac{\lambda T}{n}$. On peut alors considérer que chaque intervalle constitue une expérience dont l'issue est soit de recevoir un appel avec une probabilité $\frac{\lambda T}{n}$ soit de ne recevoir aucun appel avec une probabilité $1 - \frac{\lambda T}{n}$. Ainsi la probabilité d'obtenir k appels suit une loi binômiale de paramètres $(n, p = \lambda)$ donc :

$$P_n(X=k) = \tbinom{n}{k} \left(\frac{\lambda T}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda T}{n}\right)^{n-k}.$$

Plus n est grand plus le modèle se rapproche de la situation réelle.

1. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} P_n(X=k) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}.$$

Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λT.

2. Montrer que l'espérance de X est égale à λT.

Remarque : pour les grandes valeurs de n la lois binômiale X de paramètres $\left(n, \frac{\alpha}{n}\right)$ peut être approchée par la loi de Poisson $P(\alpha)$ de paramètre α : $P(X=k) \simeq \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha T}$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ *Lois exponentielles*

Un atome d'un élément radioactif se désintègre à un instant aléatoire.

On observe un atome d'un échantillon d'une substance radioactive et on veut calculer sa probabilité P_T de désintégration au bout d'un temps T.

On discrétise la situation de la façon suivante : on découpe l'intervalle $[0,T]$ en n intervalles $I_k = \left[\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}\right]$ $(0 \leq k \leq n-1)$ de longueur égale $\frac{T}{n}$. On suppose que la probabilité p que l'atome se désintègre sur l'intervalle I_k est proportionnelle à la longueur de l'intervalle I_k et pas de k (on dit qu'on est en présence d'un phénomène "sans mémoire"). On pose $p = \frac{\lambda T}{n}$ donc la probabilité que l'atome ne se désintégre par sur sur l'intervalle I_k est $q = 1 - \frac{\lambda T}{n}$.

Soit $A_{\left[0,\frac{kT}{n}\right]}$ l'événement "l'atome ne se désintègre pas pendant l'intervalle $\left[0, \frac{kT}{n}\right]$" et $q_k = P\left(A_{\left[0,\frac{kT}{n}\right]}\right)$.

1. Trouver une relation de récurrence entre q_{k+1} et q_k.

2. En faisant tendre n vers l'inifini montrer que la probabilité que l'atome se désintègre pendant l'intervalle de temps $[0,T]$ est :

$$P_T = e^{-\lambda T}.$$

3. Soit τ est la demi-vie de la substance radioactive : c'est le temps au bout duquel la masse de l'échantillon est réduite de moitié. Montrer que $P_T = e^{-\frac{\ln 2}{\tau}T} = 2^{-\frac{T}{\tau}}$.