Exercices Arithmétique; dénombrement

$\boxed{1}$ **1.** Montrer par récurrence que :

$$n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1.$$

On veut démontrer cette égalité d'un autre façon.

2. Montrer que pour tout entier naturel k on a : $(k+1)! = k.k! + k!$.

En déduire une autre démontration de la propriété du 1/ par un procédé "en cascade".

$\boxed{2}$ La petite Lesia va fêter ses 6 ans et souhaite inviter ses amis à une fête. Elle a 9 amis mais ses parents ne souhaitent en inviter que 5.

1. De combien de manière les parents peuvent-ils s'y prendre ?

2. De combien de manière les parents peuvent-ils s'y prendre si deux des amis ne veulent pas venir ensemble ?

3. De combien de manière les parents peuvent-ils s'y prendre si deux des amis ne veulent venir que si l'autre vient ?

$\boxed{3}$ Un site internet demande de choisir un mot de passe en utilisant 4 caractères parmi les 26 lettres minuscules de l'alphabet et les 10 chiffres.

1. Combien y a-t-il de mots de passe possibles ?

2. Combien y a-t-il de mots de passe possibles avec tous les caractères distincts ?

3. Combien y a-t-il de mots de passe possibles comportant exactement un chiffre ?

4. Combien y a-t-il de mots de passe possibles comportant au moins une lettre et au moins un chiffre ?

$\boxed{4}$ Pour n et k entiers naturels non nuls, soit $M(n,k)$ le nombre de façons de placer k maisons identiques dans une rue aux emplacements numérotées de 1 à n telle qu'aucune ne soit placée à côté d'une autre (par exemple si on a $n = 5$ et 2 maisons, on peut les placer aux emplacements 1 et 3 ou 2 et 4 etc...).

1. Calculer $M(n,1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a. Combien y -a t'il de façons de placer 2 maisons sur n emplacements s'il n'y-a pas de contraintes de proximité entre deux maisons ?

b. En déduire que pour $n \geq 2$

$$M(n,2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

3. Montrer que pour tout entier nature non nul n

$$M(n+2,k+1) = M(n,k) + M(n+1,k+1).$$

(*Indication* : considérer deux cas suivant que l'on place une maison au numéro $n+2$ ou non).

4. En la formule précédente pour $k = 2$ et par un procédé "en cascade", montrer que pour $n \geq 2$

$$M(n,3) = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6}$$

(On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

5. Démontrer par récurrence sur n que $M(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$ pour tous entiers naturels k et n.

(On a $\binom{p}{q} = 0$ si $p < q$ ou si $p < 0$).

Que devient la formule précédente si les k maisons sont distinctes deux à deux ?

$\boxed{5}$ *Nombre d'anagrammes*

1. Combient d'anagrammes peut-on former avec les lettres ABCDEFH (i.e. le nombre de mots, ayant ou non un sens, qui contiennent ces lettres une et une seule fois dans n'importe quel ordre) ?

2. Même question avec les lettres AAAEIOU (l'anagramme doit contenir 3 fois la lettre A et une et une seule fois les autres lettres).

3. Combien d'anagrammes de deux mots peut-on former avec les lettres AAAEIOU si le premier mot comporte 4 lettres avec 2 lettres A et le second mot comporte 3 lettres avec un seul A ?

$\boxed{6}$ On dispose de 8 bancs chaque banc pouvant accueillir 3 personnes. On numérote les places de 1 à 24.

Quinze personnes désirent s'assoir sur ces bancs.

1. Combien y a-t'il de répartitions possibles ?

2. Combien y a-t'il de répartitions possibles si ces personnes doivent occuper 5 bancs (les 3 autres bancs restants vide) ?

Le groupe comprend 6 filles et 9 garçons.

3. Même question qu'en 2/ si chaque banc occupé n'accueille que des filles ou que des garçons.

$\boxed{7}$ On considère d drapeaux (distincts deux à deux) et p poteaux numérotés $(p, n \in \mathbb{N}^*)$, suffisamment grands pour accueillir d drapeaux.

Soit $n_{d,p}$ le nombre de façons de disposer ces drapeaux sur les poteaux (on tient compte de l'ordre des drapeaux sur chaque poteau).

1. Calculer $n_{1,p}$ et $n_{2,2}$.

2. Montrer que $n_{d,p} = (p+d-1) \times n_{d-1,p}$.

En déduire que $n_{d,p} = \frac{(p+d-1)!}{(p-1)!}$.

$\boxed{8}$ On veut ranger 10 livres sur une étagère contenant 15 places numérotées de 1 à 15.

1. De combien de façons peut-on ranger ces livres ?

2. De combien de façons peut-on ranger ces livres si on veut qu'ils soient côte à côte ?

3. Mêmes questions si on veut que les tomes 1 et 2 de "A la recherche du temps perdu" soient à côté et dans cet ordre.

$\boxed{9}$ Un colocation doit choisir 6 colocataires parmi 10 personnes.

1. Combien y a-t'il de choix possibles ?

2. Même question si parmi les dix candidats il y-a une famille de 3 personnes (qui ne peuvent venir qu'ensemble) ?

3. Même question si parmi les dix candidats il y-a deux personnes qui ne s'entendent pas (donc ne veulent pas venir que si l'autre vient)

$\boxed{\mathbf{10}}$ On rappelle qu'un entier naturel n est *premier* s'il a exactement deux diviseurs.

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit D l'ensemble de ses diviseurs supérieurs ou égaux à 2.

Justifier que D possède un plus petit élément d.

2. Montrer que d est premier.

3. Montrer que tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de nombres premiers. ?

Correction :

$\boxed{1}$ Soit la propriété $P(n)$: " $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$".

Initialisation : $P(1)$: " $1.1! = 2! - 1$" qui est vraie.

Hérédité : supposons la propriété $P(n)$ vraie pour un entier n donné : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k.k! &= \sum_{k=1}^{n} k.k! + (n+1)(n+1)! \\
&= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \text{ (car } P(n) \text{ vraie)} \\
&= (n+1)![n+2] - 1 \\
&= (n+2)! - 1,
\end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pour tout entier naturel k on a : $(k+1)! = (k+1)k! = k.k! + k!$.

On écrit ces égalités pour $k = 1, 2, \ldots, n$ et on les somme membres à membres :

$$\begin{aligned}
2! &= 1.1! + 1! \\
3! &= 2.2! + 2! \\
4! &= 3.3! + 3! \\
&\vdots \\
(n+1)! &= n.n! + n!
\end{aligned}$$

Après simplifications il reste : $(n+1)! = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k! + 1$, soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$.

$\boxed{2}$ **1.** Le nombre d'invitations possible est le nombre de façons de choisir 5 personnes parmi 9, sans répétitions et sans tenir compte de l'ordre. C'est donc le nombre de 5-combinaisons d'un ensemble à 9 éléments, c'est à dire $\binom{9}{5} = \frac{9\times8\times7\times6\times5}{5!} = 126$.

2. Distinguons deux cas :

– si aucun des deux amis de Lison ne vient : on a $\binom{7}{5}$ façons de choisir les invités;

– si un seul des deux amis vient : il y-a deux façons de choisir un de ces deux amis et $\binom{7}{4}$ façons de choisir les quatre autre invités parmi 7 amis.

On a donc $\binom{7}{5} + 2 \times \binom{7}{4} = 21 + 2 \times 35 = 91$ façons de faire les invitations.

3. On a de même deux cas :

– si les deux amis viennent il y-a $\binom{7}{3}$ façons de choisir les 3 autres invités;

– si aucun des deux amis ne vient il y-a $\binom{7}{5}$ façons de choisir les invités.

On a donc $\binom{7}{3} + \binom{7}{5} = 35 + 21 = 56$ façons de faire les invitations.

$\boxed{\mathbf{3}}$ **1.** Le nombre de mots de passe est le nombre de 4-listes d'un ensemble à 36 éléments (car on tient compte de l'ordre et il y-a des répétitions), soit $36^4 = 1679\,616$ mots de passe possibles.

On peut aussi raisonner directement : pour le premier carctère il y-a 36 choix possible; pour le deuxième aussi, etc... jusqu'au quatrième, soit 36^4 possibilités.

2. Si tous les caractères sont distincts on obtient le nombre de 4-arrangements d'un ensemble à 36 éléments, soit $A_{36}^4 = 36 \times 35 \times 34 \times 33 = 1413\,720$ mots de passe possibles.

3. Il y-a 4 façons de choisir la place du chiffre dans le mot de passe.

Cette place étant choisie, il y-a 10 façons de placer le chiffre.

Il y-a ensuite 26^3 façons de placer une lettre dans les 3 cases restantes.

On a donc $4 \times 10 \times 26^3 = 703\,040$ mots de passe possibles.

4. Le nombre de mots de passe composés uniquement de lettres est 26^4 et le nombre de mots de passe composés uniquement de chiffres est 10^4.

Le nombre de mots de passe comportant au moins une lettre et au moins un chiffre est donc $36^4 - (26^4 + 10^4) = 1212\,640$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ **1.** On peut placer la maison aux emplacements $1, 2, \ldots, n$ donc $\boxed{M(n,1) = n}$.

2. a. Le nombre de façons de placer les deux maisons est le nombre de façons de choisir deux entiers i et j (leur emplacement) dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, sans répétition et sans tenir compte de l'ordre, donc il y-a ce nombre est $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

b. Le nombre de façons de mettre les deux maisons sur n emplacements côte à côte est $n-1$ $((1,2), (2,3), \ldots, (n-1,n))$. On a donc $M(n,2) = \binom{n}{2} - (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$, soit $\boxed{M(n,2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}}$.

3. <u>1er cas</u> : si on place une maison au numéro $n+2$, il reste à placer k maisons aux emplacements $1, 2, \ldots, n$ sans que deux maisons soient contigües, donc il y-a $M(n,k)$ façons de le faire.

<u>2ième cas</u> : s'il n'y a pas de maison au numéro $n+2$, on place $k+1$ maisons aux numéros $1, 2, \ldots, n+1$ sans que deux maisons soient contigües, donc il y-a $M(n+1, k+1)$ façons de le faire.

On a donc $\boxed{M(n+2, k+1) = M(n+1, k+1) + M(n,k)}$.

4. En appliquant la formule précédent pour $k = 2$ et $n+2 = i$ on a $M(i,3) - M(i-1,3) = M(i-2,2)$ pour $i \geq 3$. En sommant de $i = 3$ à n on obtient , après simplifications : $M(n,3) - M(2,3) = \sum_{i=1}^{n-2} M(i,2)$ soit $M(n,3) = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(i-2)(i-1)}{2}$ (car $M(2,3) = 0$).

On a $\sum_{i=1}^{n-2} \frac{(i-2)(i-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-2}(i^2 - 3i + 2) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n-2} i^2 - 3\sum_{i=1}^{n-2} i + 2(n-2)\right]$. Or $\sum_{i=1}^{n-2} i^2 = \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}$ et $\sum_{i=1}^{n-2} i = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$, d'où $M(n,3) = \frac{n-2}{6}\left[n^2 - 7n + 12\right]$, soit $\boxed{M(n,3) = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6}}$ (formule valable aussi si $n = 2$).

5. Soit la propriété $P(n)$: "$\forall k \in \mathbb{N}^*, M(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$", pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$P(1)$ est vraie car $M(1,k) = 1 = \binom{1}{1}$ si $k = 1$ et $0 = \binom{2-k}{k}$ si $k \geq 2$.

$P(2)$ est vraie car $M(2,k) = 0 = \binom{3-k}{k}$ si $k \geq 2$ et $M(2,1) = 2 = \binom{2}{1}$ si $k = 1$.

Supposons $P(i)$ vraie pour tout entier i inférieur ou égal à un entier nauturel fixé n (récurrence forte). D'après 3/ on a $M(n+1,k) = M(n-1,k-1) + M(n,k) = \binom{n-k+1}{k-1} + \binom{n-k+1}{k} = \binom{n-k+2}{k}$ (car $\binom{p}{i-1} + \binom{p}{i} = \binom{p+1}{i}$) donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence forte la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{5}$ **1.** Le nombre d'anagrammes que l'on peut former avec les lettres ABCDEFH est le nombre de façons de places ces 7 lettres dans un certain ordre, c'est donc $7! = 5040$.

(Raisonnement direct : pour la première lettre il y-a 7 emplacements possibles; cette lettre étant placée il y-a 6 emplacements possibles pour la seconde lettre etc).

2. Le nombre de façons de placer les 3 lettres A est le nombre de façons de tirer 3 numéros parmi $1, 2, \ldots, 7$ sans ternir compte de l'ordre et sans répétition : il y-en a donc $\binom{7}{3} = 35$.

Les 3 lettres A étant placées il reste à placer ensuite 4 autres lettres sur 4 emplacements, et il y-a $4! = 24$ façons de le faire (comme en 1/).

Il y-a donc $\binom{7}{3} \times 4! = 840$ anagrammes avec les lettres AAAEIOU.

3. Il y-a $\binom{4}{2}$ façons de placer les deux A dans le premier mot et $\binom{3}{1}$ façons de placer un A dans le second mot. Les trois A étant placés il y-a 4! façons de placer les quatre autres lettres.

Le nombre cherché est donc $\binom{4}{2} \times \binom{3}{1} \times 4! = 432$.

$\boxed{6}$ **1.** Pour la première personne il y-a 24 choix possible pour une place; pour la deuxième 23 choix, etc et pour la quinzième 10 choix.

Le nombre de répartition possible est donc $24 \times 23 \times \ldots \times 10 = 1709\,789\,466\,857\,472\,000$.

C'est aussi le nombre A_{10}^{24} de 10-arrangements des 24 places.

2. Il y-a $\binom{8}{5} = 56$ façons de choisir les 5 bancs qui seront occupés. Ce choix étant fait il reste à répartir les 15 personnes sur les 15 places soit 15! façons.

Le nombre de répartition possible est donc $\binom{8}{5} \times 15! = 73\,229\,764\,608\,000$.

3. Il y-a $\binom{8}{2} = 28$ façons de choisir les 2 bancs qui seront occupés par les filles puis $\binom{6}{3}$ façons de choisir les 3 bancs qui seront occupés par les garçons. Ce choix étant fait il y-a 6! de répartir les filles et 9! de répartir les garçons. Le nombre de répartions est donc $\binom{8}{2} \times \binom{6}{3} \times 6! \times 9! = 146\,313\,216\,000$.

$\boxed{7}$ **1.** On a $n_{1,p} = p$ (on peut mettre le drapeau sur sur les poteaux $1, 2, \ldots, p$).

Si on a deux drapaux et deux poteaux : si on met des deux drapeaux sur le premier poteau on a 2 possibilités et si on met des deux drapeaux sur le second poteau on a 2 possibilités, soit 4 possibilités; si on met un drapeau sur chaque poteau on a 2 possibilités donc on a $n_{2,2} = 6$.

2. Supposons que l'on ait d drapeaux et p poteaux. Il y-a $n_{d-1,p}$ façons de répartir les $d-1$ premiers drapeaux.

Si on suppose que le poteau numéro i possède d_i drapeaux il y-a $d_i + 1$ façons de placer le dernier drapeaux sur ce poteau donc il y-a en tout $\sum_{i=1}^{p} (d_i + 1) = \sum_{i=1}^{p} d_i + p = d - 1 + p$ façon de placer le dernier drapeau.

On a donc : $n_{d,p} = (d + p - 1) \times n_{d-1,p}$.

En écrivant ces relations $n_{2,p} = (p + 1) \times n_{1,p}, n_{3,p} = (p + 2) \times n_{2,p}, \ldots, n_{d,p} = (d + p - 1) \times n_{d-1,p}$ et en multipliant membres à membres on obtient : $n_{d,p} = (p + 1) \times (p + 2) \times \ldots \times (d + p - 1) \times n_{1,p}$, soit $n_{d,p} = \frac{(d+p-1)!p}{p!}$ ou $\boxed{n_{d,p} = \dfrac{(p + d - 1)!}{(p - 1)!}}$.

$\boxed{8}$ **1.** Numérotons le livres de 1 à 10. Le nombre de façons de ranger ces 10 livres est le nombre de façons de choisir les 10 numéros des 15 places en tenant compte de l'ordre (on range ensuite le premier livre à la première place etc...). Le nombre cherché est donc

$$A_{15}^{10} = 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 10\,897\,286\,400.$$

2. Il y-a 5 façons de choisir la place du livre rangé le plus à gauche (place 1 à 5). Cette place étant choisie il reste à ranger les dix livres sur les neuf places suivantes. Le nombre cherché est donc

$$5 \times 10! = 18\,144\,000.$$

3. Il y-a 5 façons de choisir la place du livre rangé le plus à gauche. Cette place étant choisie il y-a 9 façons de choisir la place du tome 1. Il reste ensuite à ranger côte à côte 8 livre dans 8 places. Le nombre cherché est donc

$$5 \times 9 \times 8! = 1814\,400.$$

$\boxed{9}$ **1.** Le nombre de choix possibles est le nombre de façons de choisir 6 personnes parmi 10, sans répétitions et sans tenir compte de l'ordre. C'est donc le nombre de 6-combinaisons d'un ensemble à 10 éléments, c'est à dire $\binom{10}{6} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5}{6!} = 210$.

2. Distinguons deux cas :

– si aucun des membres de la famille ne vient : on a $\binom{7}{6}$ choix possibles;

– si les trois membres de la famille viennent il reste à choisir 3 personnes parmi 7 soit $\binom{7}{3}$ choix possibles.

On a donc $\binom{7}{6} + \binom{7}{3} = 42$ choix possibles.

3. On a de même deux cas :

– si aucunes des personne ne vient il y-a $\binom{8}{6}$ façons de choisir colocataires;

– si une seule des deux personnes vient il y-a 2 façons de la choisir puis il reste à choisir 5 personnes parmi 8 soit $\binom{8}{5}$ choix possibles, soit $2 \times \binom{8}{5}$ choix possibles.

On a donc $\binom{8}{6} + 2 \times \binom{8}{5} = 140$ choix possibles.

$\boxed{\textbf{10}}$ **1.** L'ensemble D des diviseurs de n supérieurs ou égal à 2 est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ non vide (car il contient n) donc D possède un plus petit élément d.

2. Supposons que d ne soit pas premier. Alors il admet un diviseur δ distinct de 1 et strictement inférieur à n. Alors δ est aussi un diviseur de n supérieur ou égal à 2 donc $\delta \in D$. Cela est absurde car $\delta < d$.

Conclusion : d est un nombre premier.

3. On effectue une "récurrence forte".

Soit la propriété $P(n)$: "n se décompose en produit de nombres premiers".

La propriété est vraie pour $n = 2$ (2 est égal à sa décomposition).

Supposons la propriété $P(k)$ vraie pour $2 \leq k \leq n$ (n entier fixé) et démontrons la pour $n + 1$.

Distinguons deux cas : si $n+1$ est premier la propriété $P(n+1)$ est vraie (la décomposition de $n + 1$ n'a qu'un facteur, lui-même).

Si $n + 1$ n'est pas premier son plus petit diviseur d supérieur ou égal à 2 est strictement inférieur à $n + 1$ (car $n + 1$ n'est pas premier) et est premier (d'après 2.). Il existe un entier naturel d' tel que $n = dd'$. Comme $2 \leq d < n+1$ alors $2 \leq d' < n+1$ donc $2 \leq d \leq n$. Comme $P(d')$ est vraie alors d' se décompose en produit de facteurs premiers donc $n = dd'$ aussi (car d est premier), donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.