Exercices Déterminants

$\boxed{1}$ **1.** Soient n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On pose :

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout polynôme unitaire P (c'est à dire dont le terme de plus haut degré vaut 1) de degré $n-1$ on a :

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & & \\ P(x_1) & P(x_2) & \cdots & \cdots & P(x_n) \end{vmatrix}.$$

2. En considérant un polynôme P convenable montrer que pour $n \geq 2$ on a :

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i).$$

4. Déduire des questions précédentes la valeur de $D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$\boxed{2}$ Soient a, b, c trois réels. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $V(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

2. Montrer que :

$$\det(aA + bB, bB + cC, cC + aA) = ab \det(A, B, cC + aA) + ac \det(A, C, cC + aA) + bc \det(B, C, cC + aA)$$

3. En déduire la valeur de $\Delta(a, b, c) = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

$\boxed{3}$ Pour x, y, z, t réels soit $A = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix}$.

1. Calculer ${}^tAA$ et en déduire $|\det A|$.

2. On suppose $(y, z, t) \neq (0, 0, 0)$.

a. Montrer que la fonction $x \longmapsto \det(A)$ est polyniomale dont le terme de plus haut degré est x^4 et que cette fonction est de signe constant.

b. En déduire $\det(A)$.

Le résultat subsiste -t-il si $(y, z, t) = (0, 0, 0)$?

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.

Correction :

$\boxed{1}$ **1.** Soit $P = X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \ldots + a_0$; en effectuant l'opération $L_n \leftarrow a_0 L_1 + a_1 L_2 + \ldots + a_{n-2}L_{n-1}$ le déterminant ne change pas et on obtient :

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & & \\ P(x_1) & P(x_2) & \cdots & \cdots & P(x_n) \end{vmatrix}.$$

2. Soit le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{n-1}(X - x_i)$: c'est un polynôme unitaire de degré $n-1$ qui s'annule en $x_1, \ldots, n-1$ donc, d'aprè la question précédente on a : $D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & P(x_n) \end{vmatrix}$. En développant par rapport à la dernière ligne on obtient, vu que $P(x_n) = \prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)$, $D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)$.

3. Comme $D(x_1, x_2) = x_2 - x_1$ on obtient par récurrence en utilisant la question précédente :

$$\boxed{\forall n \geq 1, D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{\substack{i>j \\ 1\leq i,j\leq n}} (x_i - x_j)}.$$

$\boxed{2}$ **1.** $V(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} (C_2 \leftarrow C_2 - C_1, C_3 \leftarrow C_3 - C_1)$ donc $V(a,b,c) = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$ (en developpant par rapport à la première ligne) soit $\boxed{V(a,b,c) = (b-a)(c-a)(c-b)}$.

2. En developpant en utilisant la trilinéarité du déterminant on obtient :
$\det(aA + bB, bB + cC, cC + aA) = \det(aA, bB, cC + aA) + \det(aA, cC, cC + aA)$
$+ \det(bB, bB, cC + aA) + \det(bB, cC, cC + aA)$.

Or $\det(aA, bB, cC + aA) = ab\det(A, B, cC + aA)$, $\det(aA, cC, cC + aA) = ac\det(A, C, cC + aA)$, $\det(bB, bB, cC + aA) = b^2\det(B, B, cC + aA) = 0$ et $\det(bB, cC, cC + aA) = bc\det(B, C, cC + aA)$.
On a donc : $\det(aA + bB, bB + cC, cC + aA) = ab\det(A, B, cC + aA) + ac\det(A, C, cC + aA) + bc\det(B, C, cC + aA)$.

3. On a $\Delta(a,b,c) = \det(aA + bB, bB + cC, cC + aA)$.

D'autre part $\det(A, B, cC + aA) = \det(A, B, cC)$ (en ajoutant à la troisième colonne $-aA$), soit $\det(A, B, cC + aA) = c\det(A, B, C)$. De même on a $\det(A, C, cC + aA) = c\det(A, C, C) = 0$, et $\det(B, C, cC + aA) = \det(B, C, aA) = a\det(B, C, A) = a\det(A, B, C)$.

On a donc $\Delta(a,b,c) = 2abc\det(A, B, C)$, soit, d'après 1/ :

$$\Delta(a,b,c) = 2abc(b-a)(c-a)(c-b).$$

$\boxed{3}$ **1.** Un calcul facile donne ${}^tAA = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) I_4$ (matrice diagonale dont les termes de la diagonale valent tous $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$).

On a donc $\det {}^t AA = \det A . \det {}^t A = (\det A)^2$ (car $\det(MN) = \det M . \det N$). Or $\det {}^t AA = (x^2+y^2+z^2+t^2)^4$ (déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire=produit des éléments de la diagonale), donc $\boxed{|\det A| = (x^2+y^2+z^2+t^2)^2}$.

2. a. En developpant $\det A$ par rapport à la première colonne (par exemple) puis en recommençant avec les déterminants d'ordre 3 et 2 on constate que $\det A$ est une fonction polynôme dont le terme de plus haut degré est x^4.

Si $(y,z,t) \neq (0,0,0)$ on a $\det A \neq 0$ d'après la question précédente. La fonction $x \longmapsto \det A$ étant continue sur $\mathbb{R}$ elle est de signe constant.

2. b. D'après 1/ $\det A = \pm (x^2+y^2+z^2+t^2)^2$ dont le terme de plus haut degré en x est $\pm x^4$. Le terme de plus haut degré de $\det A$ étant x^4 on a donc $\boxed{\det A = (x^2+y^2+z^2+t^2)^2}$.

Si $(y,z,t) = (0,0,0)$, A est diagonale et $\det A = x^4$ donc le résultat précédent est aussi valable.

3. A est inversible $\Longleftrightarrow \det A \neq 0 \Longleftrightarrow x^2+y^2+z^2+t^2 \neq 0 \Longleftrightarrow (x,y,z,t) \neq (0,0,0,0)$.