Exercices Equations Différentielles

$\boxed{1}$ *Deux exercices indépendants sur les équations différentielles*

A. Soit l'équation différentielle :

$$xy' + (x-1)\,y = x^3.$$

1. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}^*$.

2. Existe t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

B. A étant une fonction donnée, dérivable sur $\mathbb{R}$, on cherche les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = A(x)\,. \tag{1}$$

Soit f une solution de l'équation (1).

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) = A(-x) + A'(x)\,.$$

2. En procédant par analyse-synthèse, trouver toutes les fonctions vérifiant (1) dans le cas où A est définie par $A(x) = x^2 + 1$.

$\boxed{2}$ Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation différentielle :

$$xy' + y = \arctan x \quad (E)\,.$$

2. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{3}$ On considère l'équation différentielle (E) définie par

$$x^2y' - y = \left(x^2 - 1\right)e^x. \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et dans $\mathbb{R}_-^*$.

2. Montrer que (E) a une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$. Préciser ces solutions.

$\boxed{5}$ Soit l'équation différentielle :

$$xy' + (x-1)\,y = x^3.$$

1. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}^*$.

2. Existe t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

$\boxed{6}$ On veut trouver toutes les fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f'(x) = f(\pi - x)\,. \tag{2}$$

Soit f vérifiant la condition (1).

1. Montrer que f est deux fois dérivable dans $\mathbb{R}$ et que f vérifie : $f'' + f = 0$.

2. En procédant par analyse-synthèse, trouver toutes les fonction dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant (1).

$\boxed{7}$ Soit l'équation diffférentielle

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \quad (E)\,.$$

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$z" + z = 0.$$

2. Déterminer les réels A et B tels que la fonction

$$x \longmapsto \frac{A \cos x + B \sin x}{\sqrt{x}}$$

admette une limite finie en 0^+.

Partie B

3. En effectuant le changement de fonction défini par $z(x) = \sqrt{x} y(x)$ résoudre l'équation différentielle (E) dans $\mathbb{R}_+^*$.

4. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{R}_+$.

5. Démontrer que l'ensemble des solutions de (E) ayant une limite finie en 0^+ est un espace vectoriel de dimension 1 dont on donnera une base.

Correction :

$\boxed{1}$ **A. 1.** Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ l'équation équivaut à $y' + \left(\frac{x-1}{x}\right) y = x^2$.

L'équation homogène a pour soltution $y = Ce^{-\int \frac{x-1}{x} dx} = Ce^{-x+\ln|x|} = Cxe^{-x}$. Idem sur $\mathbb{R}_+^*$ (avec une autre constante C').

On cherche une solution particulière de la forme $y_1(x) = C(x) xe^{-x}$. En reportant dans l'équation avec second membre on obtient : $C'(x) xe^{-x} = x^2$, soit $C'(x) = xe^x$ d'où $C(x) = \int xe^x dx$. On intègre par parties en posant $u = x$ (donc $u' = 1$), $v' = e^x, v = e^x$ d'où $\int xe^x dx = xe^x - e^x$. Une solution particulière de l'équation est donc : $y_1(x) = x^2 - x = x(x-1)$.

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}_+^*$ sont donc $\boxed{y(x) = Cxe^{-x} + x(x-1)}$.

Sur $\mathbb{R}_-^*$ on a de même $y(x) = C'xe^{-x} + x(x-1)$.

2. Si l'équation a une solution sur $\mathbb{R}$ la fonction y_E définie par $y_E(x) = Cxe^{-x} + x(x-1)$ pour $x > 0$ et $y_E(x) = C'xe^{-x} + x(x-1)$ pour $x < 0$ se prolonge en une fonction dérivable en 0.

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} y_E(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} y_E(x) = 0$, la fonction y_E se prolonge par continuité en 0 en posant $y_E(0) = 0$.

Voyons si ce prolongement est dérivable en 0. On a $\tau_x = \frac{y_E(x) - y_E(0)}{x} = Ce^{-x} + (x-1)$ si $x > 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \tau_x = C - 1$ et de même $\lim\limits_{x \to 0^-} \tau_x = C' - 1$. Dons y_E est dérivable en 0 ssi $C = C'$ et alors $y_E'(0) = C - 1$.

Enfin le prolongement de y_E vérifie l'équation pour $x = 0$.

Conclusion : les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont définies par $\boxed{y(x) = Cxe^{-x} + x(x-1)}$.

B. 1. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(-x) + A(x)$ (*). Comme f et A sont dérivables sur $\mathbb{R}$ il en est de même de $x \longmapsto -f(-x) + A(x)$, donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}, f"(x) = f'(-x) + A'(x)$. Or, d'après (*) on a : $f'(-x) = -f(x) + A(-x)$, donc $f"(x) = -f(x) + A(-x) + A'(x)$ d'où : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f"(x) + f(x) = A(-x) + A'(x)}$.

2. *Analyse* : d'après 1/, si y est solution de (1), alors y est solution de l'équation différentielle du second ordre : $y" + y = x^2 + 1 + 2x$.

L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont $r = \pm i$. Les solutions de l'équation homgène sont donc $y(x) = A \cos x + B \sin x$ (où A et B sont des constantes réelles).

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme d'un polynôme de degré 2 : $y_1(x) = ax^2 + bx + c$. En reportant dans l'équation on obtient : $ax^2 + bx + c + 2a = x^2 + 1$ d'où : $a = 1, b = 2, 2a + c = 1$, soit $y_1(x) = x^2 + 2x - 1$.

Les solutions de l'équation $y" + y = x^2 + 1 + 2x$ sont donc : $y(x) = A\cos x + B\sin x + x^2 + 2x - 1$.

Synthèse : posons $y(x) = A\cos x + B\sin x + x^2 + 2x - 1$. Donc $y'(x) = -A\sin x + B\cos x + 2x + 2$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(-x) = (A+B)\cos x - (A+B)\sin x + x^2 + 1$.

y est donc solution de (1) ssi $B = -A$.

En définitive, les fonctions vérifiant (1) sont les fonctions : $\boxed{x \longmapsto A\cos x - A\sin x + x^2 + 2x - 1}$.

$\boxed{2}$ **1.** Résolvons l'équation dans $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.
L'équation (E) équivaut alors à $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\arctan x}{x}$.

Les solutions de l'équation homogène sont : $y(x) = Ce^{-\ln|x|}$, soit $y(x) = \frac{C}{x}$ où C est une constante réelle.

On cherche une solution particulière de (E) de la forme $y(x) = \frac{C(x)}{x}$ où $x \longmapsto C(x)$ est une fonction dérivable (méthode de "variation de la constante").

On a $y'(x) = \frac{C'(x)x + C(x)}{x^2}$ et en reportant dans (E) on obtient : $\frac{C'(x)}{x} = \frac{\arctan x}{x}$, soit $C'(x) = \arctan x$ donc $C(x) = \int \arctan x.dx$. On intègre par parties en posant ;

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = \arctan x & ; u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = 1 & ; v = x \end{array} \right. ,$$

(u et v étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$) et on obtient : $\int \arctan x.dx = x\arctan x - \frac{x}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Une solution particulière de (E) est donc : $y(x) = \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2x}$.

Les solutions de (E) dans $\mathbb{R}^*$ sont donc :

$$y_E(x) = \left\{ \begin{array}{l} \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2x} + \frac{C_1}{x} \text{ si } x > 0 \\ \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2x} + \frac{C_2}{x} \text{ si } x < 0 \end{array} \right. .$$

2. Si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors elle est solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$ donc elle coïncide avec la fonction y_E trouvée précedemment donc celle-ci se prolonge par continuité et dérivabilité en 0.

Or $\frac{\ln(1+x^2)}{2x} \sim \frac{x^2}{x} = x$ au voisinage de 0 donc $\frac{\ln(1+x^2)}{2x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{C}{x}$ n'a une limite finie en 0 ssi $C = 0$. On a donc $C_1 = C_2 = 0$ et alors y_E se prolonge par continuité en 0 en posant $y_E(0) = 0$.

On a donc $y(x) = \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2x}$ si $x \neq 0$ et $y(0) = 0$.

Vérifions que cette fonction en bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Montrons d'abord qu'elle est dérivable en 0. Son taux d'accroissement en 0 est $\tau_x = \frac{y(x) - y(0)}{x} = \frac{2x\arctan x - \ln(1+x^2)}{2x^2}$. On a $2x\arctan x = 2x^2 + o(x^2)$ et $\ln(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$ donc $\tau_x = \frac{2x^2 - x^2 + o(x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2} + o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
y est donc dérivable en 0 et $y'(0) = \frac{1}{2}$.

Enfin il est clair que cette fonction vérifie (E) ent 0.

Conclusion : la fonction y définie par $y(x) = \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2x}$ si $x \neq 0$ et $y(0) = 0$ est la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{3}$ **1.** L'équation (E) équivaut à $y' - \frac{y}{x^2} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^x$ (E') pour $x \neq 0$.

Pour $x > 0$ les solutions de l'équation homogène $y' - \frac{y}{x^2} = 0$ sont $y_0(x) = Ce^{-1/x}$.

On cherche une solution particulière de l'équation (E') sous la forme $y_1(x) = C(x)\, e^{-1/x}$.

On a $y_1'(x) = C'(x)\,.e^{-1/x} + C(x)\,.\left(e^{-1/x}\right)'$ et en reportant dans l'équation (E') : $C'(x)\,.e^{-1/x} + C(x)\,.\left(e^{-1/x}\right)' - \frac{1}{x^2}.C(x)\, e^{-1/x} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^x$, soit $C'(x)\,.e^{-1/x} + C(x)\left[\left(e^{-1/x}\right)' - \frac{1}{x^2}.e^{-1/x}\right] = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^x$ ou $C'(x)\,.e^{-1/x} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^x$, soit $C'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}}$. On prend $C(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$. Une solution particulière de (E) est donc $y_1(x) = e^x$.

Les solutions de (E) pour $x > 0$ sont donc :

$$y(x) = Ce^{-1/x} + e^x.$$

Pour $x < 0$ on a de même $y(x) = Ce^{-1/x} + e^x$ donc les solutions de (E) dans $\mathbb{R}^*$ sont :

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{-1/x} + e^x \text{ si } x > 0 \\ C'e^{-1/x} + e^x \text{ si } x < 0 \end{cases},$$

où C et C' sont deux constantes arbitraires.

2. Si z est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ c'est un prolongement de la fonction précédente par continuité (et même par dérivabilité) en 0.

Or $Ce^{-1/x} \longrightarrow 0$ en 0^+ donc $y(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$.

D'autre part $C'e^{-1/x} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$ ou $-\infty$ suivant que $C' > 0$ ou $C' < 0$. Donc y a donc une limite finie en 0^- ssi $C' = 0$.

y se prolonge donc par continuité en 0 ssi $C' = 0$ en posant $y(0) = 1$.

On a donc :

$$z(x) = \begin{cases} Ce^{-1/x} + e^x \text{ si } x > 0 \\ e^x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}. \tag{3}$$

Vérifions que z est dérivable en 0. Le taux de variation en 0 est $\tau(x) = \frac{Ce^{-1/x} + e^x - 1}{x}$ si $x > 0$ et $\tau(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ si $x < 0$.

On a $\frac{e^x - 1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$. D'autre part, si $x > 0$ $\tau(x) = \frac{Ce^{-1/x} + e^x - 1}{x} = \frac{Ce^{-1/x}}{x} + \frac{e^x - 1}{x}$. On pose $X = \frac{1}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{e^{-1/x}}{x} = \frac{X}{e^X} \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\tau(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$.

La fonction z est donc dérivable en 0 et $z'(0) = 1$.

Enfin la fonction z vérifie l'équation (E) pour $x = 0$ (car $z(0) = 1$).

Conclusion : les solutions de (E) dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions z définies par (1).

$\boxed{4}$ **1.** Soit P un polynôme solution de (E) et ax^n $(a \neq 0)$ son terme de plus haut degré. Le terme de plus haut degré de $(x^2+1)P" - 2P$ est $[n(n-1) - 2]\, ax^n$ si $n \geq 2$ et $-2ax^n$ si $0 \leq n \leq 1$. On a donc $n(n-1) - 2 = 0$, soit $n = 2$. Réciproquement $P(x) = ax^2 + bx + c$ est solution de (E) ssi $-2bx + 2a - 2c = 0$, soit $b = 0$ et $a = c$. Par exemple $y_0 = x^2 + 1$ est solution de (E).

2. Si y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ on écrit $y = (x^2+1)\, z$ avec $z = \frac{y}{x^2+1}$ qui est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose $y = y_0 z = (x^2+1)\, z$ d'où $y" = 2z + 4xz' + (x^2+1)\, z"$ et y est solution de (E) ssi $(x^2+1)\left[2z + 4xz' + (x^2+1)\, z"\right] - 2(x^2+1)\, z = 0$ soit $\boxed{4xz' + (x^2+1)\, z" = 0 \text{ (E')}}$.

3. On intègre par parties en posant $u = x$ et $v' = \frac{x}{(1+x^2)^2}$; $u' = 1, v = -\frac{1}{2(1+x^2)}$ (u et v de classe C^1 sur $\mathbb{R}$). On obtient $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x$.

On écrit $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{\left(1+x^2-x^2\right)dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{(1+x^2)} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$, soit $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\arctan x = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)}$.

4. En posant $Z = z'$ **(E')** équivaut à $4xZ + (x^2+1)Z' = 0$, soit $Z' + \frac{4x}{1+x^2}Z = 0$. Les solutions de cette dernière équation différentielle sont $Z = Ce^{-2\ln\left(x^2+1\right)} = \frac{C}{(x^2+1)^2}$. On obtient donc $z' = \frac{C}{(x^2+1)^2}$ soit $z = C\int\frac{dx}{(1+x^2)^2} + C' = \frac{C}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C'$.Les solutions de (E) sont donc $y = y_0.z$ soit $\boxed{y(x) = K\left[(x^2+1)\arctan x + x\right] + C'(1+x^2)}$ (en posant $K = \frac{C}{2}$).

$\boxed{5}$ **1.** Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ l'équation équivaut à $y' + \left(\frac{x-1}{x}\right)y = x^2$.

L'équation homogène a pour soltution $y = Ce^{-\int\frac{x-1}{x}dx} = Ce^{-x+\ln|x|} = Cxe^{-x}$. Idem sur $\mathbb{R}_-^*$ (avec une autre constante C').

On cherche une solution particulière de la forme $y_1(x) = C(x)xe^{-x}$. En reportant dans l'équation avec second membre on obtient : $C'(x)xe^{-x} = x^2$, soit $C'(x) = xe^x$ d'où $C(x) = \int xe^x dx$. On intègre par parties en posant $u = x$ (donc $u' = 1$), $v' = e^x, v = e^x$ d'où $\int xe^x dx = xe^x - e^x$. Une solution particulière de l'équation est donc : $y_1(x) = x^2 - x = x(x-1)$.

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}_+^*$ sont donc $\boxed{y(x) = Cxe^{-x} + x(x-1)}$.

Sur $\mathbb{R}_-^*$ on a de même $\boxed{y(x) = C'xe^{-x} + x(x-1)}$.

2. Comme $\lim\limits_{x\to0^+} y_E(x) = \lim\limits_{x\to0^+} y_E(x) = 0$, la fonction y_E se prolonge par continuité en 0 en posant $y_E(0) = 0$.

Voyons si ce prolongement est dérivable en 0. On a $\tau_x = \frac{y_E(x)-y_E(0)}{x} = Ce^{-x} + (x-1)$ si $x > 0$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}\tau_x = C-1$ et de même $\lim\limits_{x\to0^-}\tau_x = C'-1$. Dons y_E est dérivable en 0 ssi $C = C'$ et alors $y_E'(0) = C-1$.

Enfin le prolongement de y_E vérifie l'équation pour $x = 0$.

Conclusion : les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont définies par $\boxed{y(x) = Cxe^{-x} + x(x-1)}$.

$\boxed{6}$ **1.** Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ il en est de même pour la fonction $x \longmapsto f(\pi - x)$ (composée de fonctions dérivables). Comme $f'(x) = f(\pi - x)$ pour tout x, la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

En dérivant $f'(x) = f(\pi - x)$ on obtient : $f"(x) = -f'(\pi - x)$. Or $f'(\pi - x) = f(x)$ (en remplaçant x par $\pi - x$ dans (1)), donc $f"(x) = -f'(x)$, soit $f"(x) + f(x) = 0$ pour tout réel x.

2. *Analyse* : si f vérifie (1) donc elle est solution de l'équation différentielle $y" + y = 0$, d'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, soit $f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ (A et B constantes réelles).

Synthèse : $x \longmapsto$ vérifie (1) ssi : $\forall x \in, -A\sin(x) + B\cos(x) = A\cos(\pi - x) + B\sin(\pi - x)$, soit $-A\sin(x) + B\cos(x) = -A\cos(x) + B\sin(x)$, ce qui équivaut à $B = -A$.

Conclusion : les solutions de (1) sont les fonctions $x \longmapsto A(\cos(x) - \sin(x))$.

$\boxed{7}$ Soit l'équation diffférentielle $z(x) = \sqrt{x}y(x)$

$$x^2y" + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0.$$

4. z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions deux fois dérivables et on a $y(x) = x^{-1/2}z(x)$ donc $y'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}z(x) + x^{-1/2}z'(x)$ et $y"(x) = x^{-1/2}z"(x) - x^{-3/2}z'(x) + \frac{3}{4}x^{-5/2}z(x)$.

En reportant dans (E) on a : y est solution de (E) ssi $x^{3/2}z"(x) - x^{1/2}z'(x) + \frac{3}{4}x^{-1/2}z(x) - \frac{1}{2}x^{-1/2}z(x) + x^{1/2}z'(x) + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)x^{-1/2}z(x) = 0$, soit $x^{3/2}z"(x) + x^{3/2}z(x) = 0$ ce qui équivaut à $z" + z = 0$.

D'après 1/ les solutions de cette équation différentielle sont $z(x) = A\cos x + B\sin x$.

Les solutions de (E) sont donc : $y(x) = \frac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}}$, avec A et B constantes réelles.

5. D'après 2/ les solutions de (E) ayant une limite finie en 0^+ sont : $y(x) = B\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.
L'ensemble $\left\{B\frac{\sin x}{\sqrt{x}} / B \in \mathbb{R}\right\}$ est la droite vectorielle de base $x \longmapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.