Exercices Espaces Vectoriele Euclidiens; Matrices Orthogonales

$\boxed{1}$ Soit E un espace euclidien de dimension 3 et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base orthonormée directe $B = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est

$$A = \begin{pmatrix} -2y & y & x \\ y & 7x & y \\ x & y & -2y \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les réels x et y pour que f soit une isométrie de E.

2. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f dans les deux cas suivants :

a. $x = \frac{1}{9}$ et $y = \frac{4}{9}$;

b. $x = -\frac{1}{9}$ et $y = -\frac{4}{9}$.

$\boxed{2}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme canoniquement associée à A. Soit $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On pose : $u_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3, u_2 = e_1 + e_2, u_3 = e_1 - e_2 + e_3$.

1. Montrer que $B = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer l'image des vecteurs u_1, u_2, u_3 par f et les exprimer en fonction de u_1, u_2 et u_3.

Pour α, β, γ réels non nuls, il résulte du 1/ que $B' = (\alpha u_1, \beta u_2, \gamma u_3)$ est encore une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Déduire de la question 2/, avec un minimum de calculs, la matrice A' de f dans la base B'.

On pose :

$$P = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ 2\alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice P soit orthogonale.

Dans la suite α, β, γ ont des valeurs telles que P soit orthogonale.

5. Montrer sans calculs que $A = PA'{}^tP$.

Pour x, y, z réels on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (matrice colonne de type $(3,1)$) et ${}^tX = (x, y, z)$ (matrice ligne de type $(1,3)$).

Soit Q une matrice réelle symétrique de type $(3,3)$. Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$ on pose $g(X,Y) = {}^tXQY$.

6. Quel est le type de la matrice ${}^tXQY$?

Montrer que g est une forme symétrique et bilinéaire de $\mathbb{R}^3$ (on assimilera une matrice de type $(1,1)$ à un réel).

On pose dans la suite $Q = A$ (donc $g(X,Y) = {}^tXAY$) et $\varphi(X) = g(X,X) = {}^tXAX$ (où A est la matrice définie précedemment).

7. Calculer $\varphi(X)$ en fonction de x, y, z.

On pose ${}^tPX = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = X'$.

8. Montrer que $\varphi(X) = 4y'^2 + 6z'^2$.

En déduire que g est une forme positive de $\mathbb{R}^3$.

Est-ce un produit scalaire de $\mathbb{R}^3$?

$\boxed{3}$ Pour a et b réels, on note $M(a,b)$ la matrice définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} 3a & 2b & 2b \\ 2b & 3a & 2b \\ 2b & 2b & 3a \end{pmatrix},$$

et on note $f_{a,b}$ l'endomorphisme ayant pour matrice $M(a,b)$ dans une base orthonormée d'un espace euclidien E.

1. Calculer le déterminant de $M(a,b)$ (on donnera le résultat sous forme factorisé).

2. Calculer les valeurs de a et b telles que la $f_{a,b}$ soit une isométrie de E.

3. Dans les cas où $M(a,b)$ est une matrice orthogonale avec $b \neq 0$ préciser la nature de l'endomorphisme $f_{a,b}$.

$\boxed{4}$ **Partie 1.**

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n il existe un polynôme U_n à coefficients réels tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ \ \sin[(n+1)\theta] = \sin(\theta) \times U_n(\cos\theta). \tag{1}$$

(On pourra utiliser la relation : $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$ valable pour tous réels a et b).

Montrer que :

$$\forall n \geq 1, U_{n+1}(X) = 2XU_n(X) - U_{n-1}(X). \tag{2}$$

Calculer U_0, U_1, U_2 et U_3.

2. Montrer que pour tout entier naturel n il existe un unique polynôme U_n vérifiant (1).

3. En utilisant la relation (2) montrer que U_n est de degré n.

Calculer le coefficient du terme de plus haut degré de U_n.

4. Montrer que U_n possède n racines réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ distinctes deux à deux dans l'intervalle $[-1,1]$.

5. Pour $n \geq 1$ donner la décomposition de U_n en produit de polynômes de degré 1 dans $\mathbb{R}[X]$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Partie 2.

On pose, pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$:

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t) \sqrt{1-t^2}\, dt.$$

6. Montrer que l'application $(P,Q) \longmapsto \langle P, Q \rangle$ de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}[X]$.

(On montrera en particulier avec soin que cette application est définie).

7. Pour p et q entiers naturels distincts exprimer $\langle U_p, U_q\rangle$ sous forme d'une intégrale de la variable t.

En posant $t = \cos(x)$ avec $x \in [0, \pi]$ dans cette intégrale, montrer que $\langle U_p, U_q\rangle = 0$

(on pourra utiliser 2/ et la relation $2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$, valable pour tous réels a et b).

Que peut-on dire du système $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

8. En s'inspirant de 6/ calculer $\|U_n\|$ pour $n \in \mathbb{N}$.

En déduire un système orthonormé de $\mathbb{R}[X]$.

Correction :

$\boxed{1}$ **1.** f est une isométrie ssi la matrice A est orthogonale soit ssi ses colonnes formes un système orthonormé de $\mathbb{R}^3$ (muni de son produit scalaire canonique) ce qui donne le système

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 & = 1 \\ 49x^2 + 2y^2 & = 1 \\ -2y^2 + 8xy & = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x^2 + 5y^2 & = 1 \ (1) \\ 49x^2 + 2y^2 & = 1 \ (2) \\ y(4x - y) & = 0 \ (3) \end{cases}.$$

L'équation (3) donne $y = 0$ ou $y = 4x$. La solution $y = 0$ ne convient pas d'après (1) et (2). On a donc $y = 4x$ et en reportant dans (1) et (2) on obtient $81x^2 = 1$ soit $x = \pm\frac{1}{9}$.

Les couples (x, y) solutions sont donc $\left\{\left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right), \left(-\frac{1}{9}, -\frac{4}{9}\right)\right\}$.

2. a. Si $x = \frac{1}{9}$ et $y = \frac{4}{9}$ on a $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$. On vérifie que $\det A = 1$ donc f est une rotation. Son angle θ vérifie $2\cos\theta + 1 = TrA = -1$ donc $\cos\theta = -1$ soit $\theta = \pi$ donc f est un demi-tour. Son axe est l'ensemble des vecteurs invariants, donc leur coordonnées vérifient les systèmes

$$\begin{cases} -8x + 4y + z & = 9x \\ 4x + 7y + 4z & = 9y \\ x + 4y - 8z & = 9z \end{cases} \iff \begin{cases} -17x + 4y + z & = 0 \\ 2x - y + 2z & = 0 \\ x + 4y - 17z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -17x + 4y + z & = 0 \\ -9x + 9z & = 0 \\ 18x - 18z & = 0 \end{cases}$$

($L_2 \longleftarrow 4L_2 + L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$). On obtint $x = z = t$ et $y = 4t$. Donc l'axe de la rotation en engendré par le vecteur $(1, 4, 1)$.

b. Si $x = -\frac{1}{9}$ et $y = -\frac{4}{9}$ on obtient la matrice $A' = -A$. Donc $\det A' = (-1)^3 \det A = -1$. Les coordonnées des vecteurs invariants sont solution du système

$$\begin{cases} 8x - 4y - z & = 9x \\ -4x - 7y - 4z & = 9y \\ -x - 4y + 8z & = 9z \end{cases} \iff \begin{cases} -x - 4y - z & = 0 \\ -4x - 16y - 4z & = 0 \\ -x - 4y - 8z & = 0 \end{cases}$$

donc l'ensemble des vecteurs invariant est le plan d'équation $x + 4y + z \ = 0$. f est donc la reflexion de pl

$\boxed{2}$ **1.** Comme B possède trois éléments il suffit de montrer que le système est libre ce qu'on l'on vérifie facilement.

2. On a $A.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc $f(u_1) = 0, f(u_2) = 4u_2$ et $f(u_3) = 6u_3$.

3. On a $f(\alpha u_1) = \alpha\ f(u_1) = 0, f(\beta u_2) = \beta\ f(u_2) = 4\beta u_2$ et $f(\gamma u_3) = \gamma f(u_3) = 6\gamma u_3$ donc la matrice A' de f dans la base B' est $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

4. La matrice P est orthogonale ssi ses colonnes forment un sytème orthonormé de $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique ce qui donne le système : $6\alpha^2 = 1, 2\beta^2 = 1, 3\gamma^2 = 1$ soit $\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \beta = \pm 1, \gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. On remarque que P est la matrice de passage de la base canonique B_0 de $\mathbb{R}^3$ à la base B', donc on a : $A' = P^{-1}AP$, soit $A = PA'P^{-1}$. Comme la matrice P est orthogonale on a $P^{-1} =^t P$ d'où $\boxed{A = PA'^tP}$.

6. ${}^tX$ est type $(1,3)$, Q de type $(3,3)$ et Y de type $(3,1)$, donc ${}^tXQY$ est de type $(1,1)$, que l'on assimile à un réel.

On a donc : ${}^tXQY =^t ({}^tXQY)$. Or ${}^t({}^tXQY) =^t Y^tQ^t({}^tX) =^t YQX$ (car Q est symétrique et ${}^t({}^tX) = X$), donc ${}^tXQY =^t YQX$, soit $g(X,Y) = g(Y,X)$, donc g est symétrique.

De plus, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $g(X + \lambda X', Y) =^t (X + \lambda X')QY = \left({}^tX + \lambda^t X'\right)QY$, soit $g(X + \lambda X', Y) =^t XQY + \lambda^t X'QY = g(X,Y) + \lambda g(X',Y)$. g est donc linéaire par rapport à la première composante, et comme elle est symétrique, g est bilinéaire.

7. Un calcul facile donne : $\varphi(X) = 4x^2 + 4xz + 4y^2 - 4yz + 2z^2$.

8. Comme ${}^tPX = X'$ on a $X = ({}^tP)^{-1}X'$, soit $X = PX'$ (car ${}^tP = P^{-1}$).

On a alors $\varphi(X) =^t XAX =^t (PX')APX' =^t X'^tPAPX' =^t X'A'X'$ (car ${}^tPAP = A'$ d'après 5/).

Or ${}^tX'A'X' = (x', y', z')\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 4y'^2 + 6z'^2$.

Il en résulte que : $\forall X \in \mathbb{R}^3, \varphi(X) = g(X,X) \geq 0$, donc g est une forme positive.

Mais g n'est par un produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ car elle n'est pas définie, car par exemple si ${}^tPX = X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $g(X,X) = 0$ et $X \neq 0$.

$\boxed{3}$ **1.** On a $\det M(a,b) = \begin{vmatrix} 3a & 2b & 2b \\ 2b & 3a & 2b \\ 2b & 2b & 3a \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} 3a+4b & 3a+4b & 3a+4b \\ 2b & 3a & 2b \\ 2b & 2b & 3a \end{vmatrix}$, donc $\det M(a,b) =$ $(3a+4b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & 3a & 2b \\ 2b & 2b & 3a \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} (3a+4b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & 3a-2b & 0 \\ 2b & 0 & 3a-2b \end{vmatrix}$, d'où $\boxed{\det M(a,b) = (3a+4b)(3a-2b)^2}$.

2. $f_{a,b}$ est un isométrie ssi la matrice $M(a,b)$ est une matrice orthogonale, ssi ses colonnes forment un système orthonormé de $\mathbb{R}^3$ (muni de son produit scalaire canonique), ce qui donne le système :

$$\begin{cases} 9a^2 + 8b^2 & = 1 \ (1) \\ 12ab + 4b^2 & = 0 \ (2) \end{cases}.$$

L'équation (2) équivaut à $b(3a+b) = 0$ soit $b = 0$ ou $3a + b = 0$.

Si $b = 0$, l'équation (1) donne $a = \pm\frac{1}{3}$.

Si $3a + b = 0$ on a $b = -3a$ et l'équation (1) donne $9a^2 + 72a^2 = 1$, soit $a = \pm\frac{1}{9}$.

Les couples pour lesquels $f_{a,b}$ est une isométrie sont donc $\left(\pm\frac{1}{3}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}\right)$ et $\left(-\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right)$.

3. Si $a = 1/9$ et $b = -1/3$ on a $\det M(1/9, -1/3) = -1$ d'après 1/ donc $f_{a,b}$ est une réflexion plane ou une antirotation. Cherchons l'ensemble des vecteurs invariants : $X(x,y,z)$ est invariant ssi $f_{a,b}(X) = X$ ce qui donne le système : $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{2y}{3} - \frac{2z}{3} & = x \\ -\frac{2x}{3} + \frac{y}{3} - \frac{2z}{3} & = y \\ -\frac{2x}{3} - \frac{2y}{3} + \frac{z}{3} & = z \end{cases}$ qui équivaut $x + y + z = 0$. L'ensemble des vecteurs invariants est le plan P d'équation $x + y + z = 0$ donc $f_{1/9,-1/3}$ est la réflexion de plans P.

Si $a=-1/9$ et $b=1/3$ on a $M(-1/9,1/3)=-M(1/9,-1/3)$, donc $\det M(-1/9,1/3)=(-1)^3\det M(1/9,-1/3)=+1$, donc $f_{-1/9,1/3}$ est une rotation.

Son axe est l'ensemble des vecteurs invariants : comme précédemment on obtient le système $\left\{\begin{array}{ll} -\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}+\frac{2z}{3} & =x \\ \frac{2x}{3}-\frac{y}{3}+\frac{2z}{3} & =y \\ \frac{2x}{3}+\frac{2y}{3}-\frac{z}{3} & =z \end{array}\right.$, équivalent à $\left\{\begin{array}{ll} -2x+y+z & =0 \\ x-2y+z & =0 \\ x+y-2z & =0 \end{array}\right.$, équivalent à $\left\{\begin{array}{ll} -2x+y+z & =0 \\ x-y & =0 \end{array}\right.$.

En prenant $t=x$ pour paramètre on obtient $x=y=z=t$, donc l'axe est la droite engendrée par $\overrightarrow{n}(1,1,1)$.

L'angle θ vérifie $2\cos\theta+1=Tr(M(-1/9,1/3))=-1$ donc $\cos\theta=-1$, soit $\theta\equiv\pi\ (2\pi)$.

Donc $f_{-1/9,1/3}$ est le demi-tour d'axe D.

$\boxed{4}$ **Partie 1.**

1. Soit la propriété $P(n)$: "$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \sin(\theta)\times U_n(\cos\theta)=\sin[(n+1)\theta]$".

$P(0)$ et $P(1)$ sont vraies avec $\boxed{U_0=1}$ et $\boxed{U_1=2X}$ (car $\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$).

Supposons $P(n)$ vraie pour tout entier k inférieur ou égal à n (entier fixé ≥ 1).

D'après la formule rappelée dans l'énoncé on a, pour tout réel θ :

$$\sin[(n+2)\theta]+\sin(n\theta)=2\sin[(n+1)\theta]\cos(\theta),$$

donc, d'après l'hypothèse de récurrence : $\sin[(n+2)\theta]+\sin(\theta)\times U_{n-1}(\cos\theta)=2U_n(\cos\theta)\sin(\theta)\cos(\theta)$.

On a donc : $\sin[(n+2)\theta]=\sin(\theta)[2U_n(\cos\theta)\cos(\theta)-U_{n-1}(\cos\theta)]$, soit $\sin[(n+2)\theta]=\sin(\theta)U_{n+1}(\cos\theta)$ avec $U_{n+1}(X)=2XU_n(X)-U_{n-1}(X)$, qui est bien un polynôme à coefficients réels. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence (forte) on a $P(n)$ vraie pour tout entier naturel n.

De plus le raisonnement précédent montre que $\boxed{\forall n\geq 1, U_{n+1}(X)=2XU_n(X)-U_{n-1}(X)}$.

2. Supposons qu'il existe un polynôme V_n vérifiant (1).

Alors, pour tout réel $\theta\not\equiv 0\,(\pi)$ on a $U_n(\cos\theta)=V_n(\cos\theta)$.

Les polynômes U_n et V_n coïncident en un infinité de points ils sont donc égaux.

Conclusion : il existe un unique polynôme U_n vérifiant (1).

3. Soit la propriété $P(n)$: "U_n est de degré n et son terme de plus haut degré est 2^n".

$P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

Supposons $P(n)$ vraie pour tout entier k inférieur ou égal à n (entier fixé ≥ 1).

On a $U_{n+1}=2XU_n-U_{n-1}(X)$ et $d^\circ(U_n)=n$ (donc $d^\circ(2XU_n)=n+1$) et $d^\circ(U_{n-1})=n-1$ donc $d^\circ(U_{n+1})=n+1$.

Le coefficient du terme de plus haut degré de U_{n+1} s'obtient alore en multipliant par 2 celui de U_n donc il est égal à 2^{n+1}.

Conclusion : d'après le principe de récurrence (forte) on a $P(n)$ vraie pour tout entier naturel n.

4. On a $\sin[(n+1)\theta]=0\Longleftrightarrow(n+1)\theta\equiv 0\,(\pi)\Longleftrightarrow\theta=\theta_k=\frac{k\pi}{n+1}\ (k\in\mathbb{Z})$.

On a donc : $\forall k\in\mathbb{Z},\sin(\theta_k)\times U_n(\cos(\theta_k))=0$ d'après (1). Pour $k=1,2,\ldots,n$ on a $\theta_k\in]0,\pi[$ donc $\sin(\theta_k)\neq 0$, d'où $U_n(\cos(\theta_k))=0$.

Les réel $x_k=\cos(\theta_k)$ pour $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ appartiennent à l'intervalle $[-1,1]$ et sont distincts deux à deux (car la restriction de cos à $[0,\pi]$ est injective). Comme U_n est de degré n, U_n a au plus n racines; les réels $x_k=\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ sont donc toutes les racines de U_n.

Conclusion : les réel $\boxed{x_k=\cos(\theta_k)=\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}$ $(k\in\{1,2,\ldots,n\})$ sont les racines de U_n (car $d^\circ U_n=n$).

5. D'après 4/ on a : $U_n(X) = \lambda(X - x_1)\dots(X - x_n)$.

Le terme de plus haut degré de U_n est $2^n X^n$ (3/) et celui de $\lambda(X - x_1)\dots(X - x_n)$ est λX^n, donc $\lambda = 2^n$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 1, U_n(X) = 2^n (X - x_1)\dots(X - x_n)}$.

Partie 2.

6. On voit facilement que la forme $(P, Q) \longmapsto \langle P, Q\rangle$ est symétrique, bilinéaire, positive.

Vérifions qu'elle définie : si $\langle P, P\rangle = 0$ alors $\int_{-1}^{1} P(t)^2 \sqrt{1 - t^2} dt = 0$. Comme l'application $t \longmapsto P(t)^2 \sqrt{1 - t^2}$ est continue que $[-1, 1]$ et positive alors on a $\forall t \in [-1, 1], P(t)^2 \sqrt{1 - t^2} = 0$, soit $P(t) = 0$ pour tout réel de $]-1, 1[$. Le polynôme P a une infinité de racine il est donc nul et donc la forme est bien définie.

Conclusion : $(P, Q) \longmapsto \langle P, Q\rangle$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}[X]$.

7. Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ on a $\langle U_p, U_q\rangle = \int_{-1}^{1} U_p(t) U_q(t) \sqrt{1 - t^2} dt$.

On pose dans cette intégrale $t = \cos x$ avec $x \in [0, \pi]$ donc $dt = -\sin x dx$, $\sqrt{1 - t^2} = \sin x$ et on obtient : $\langle U_p, U_q\rangle = \int_0^{\pi} U_p(\cos x) U_q(\cos x) \sin^2 x dx = \int_0^{\pi} \sin[(p+1)x] . \sin[(q+1)x] dx$, d'après la question 2/. Comme $2\sin[(p+1)x] . \sin[(q+1)x] = \cos[(p-q)x] - \cos[(p+q+2)x]$, on obtient : $\langle U_p, U_q\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos[(p-q)x] dx - \int_0^{\pi} \cos[(p+q+2)x] dx$,

soit $\langle U_p, U_q\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin[(p-q)x]}{p-q} - \frac{\sin[(p+q+2)x]}{p+q+2}\right]_0^{\pi} = 0$.

Conclusion : $\boxed{\langle U_p, U_q\rangle = 0 \text{ pour } p \neq q}$.

La famille $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc orthogonale.

8. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\|U_n\|^2 = \langle U_n, U_n\rangle = \int_{-1}^{1} U_n(t)^2 \sqrt{1 - t^2} dt$. Le changement de variable $t = \cos x$ donne comme précédemment : $\|U_n\|^2 = \int_0^{\pi} \sin^2[(n+1)x] dx$.

On linéarise : $\sin^2[(n+1)x] = \frac{1 - \cos[2(n+1)x]}{2}$, d'où $\|U_n\|^2 = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos[2(n+1)x]}{2} x dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin[2(n+1)x]}{2(n+1)}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$, donc $\boxed{\|U_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

Le système $\left(\frac{U_k}{\|U_k\|}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} U_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc un système orthonormé de $\mathbb{R}[X]$.