Exercices Espaces Vectoriels-Matrices

$\boxed{1}$ Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u(e_1) = (-1, 1, 3)\,,\; u(e_2) = (3, -8, -14)\,,\; u(e_3) = (-2, 5, 9)\,.$$

1. Justifier l'existence et l'unicité de u.

2. Montrer que les formules analytiques de u sont :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -x + 3y - 2z \\ y' & = & x - 8y + 5z \\ z' & = & 3x - 14y + 9z \end{array}\right.$$

3. Trouver le noyau de u et en donner une base.

Quelle est la dimension de $\ker u$? En déduire le rang de u.

Que peut-on dire de u ?

4. Calculer le rang du système de vecteurs $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$.
Retrouver la dimension du noyau de u.

5. Définir les formules analytiques de u^2.

Indiquer les calculs qu'il faudrait effectuer pour montrer que $u^3 = 0$ (endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$) (on ne demande pas d'effectuer ces calculs).

6. Soit X_0 un élément de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^2(X_0) \neq 0$. On pose $f_1 = X_0, f_2 = u(X_0), f_3 = u^2(X_0)$.

Montrer que le système (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{2}$ *Question préliminaire.*
Soit f une application linéaire de E dans E telle que $f \circ f = Id_E$.
Soit $s = Id_E - 2f$. Montrer que $s \circ s = Id_E$.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f_1 = e_2 - e_3$, $f_2 = -e_1 + 2e_2 - e_3$, $f_3 = -e_1 + e_2$ éléments de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire u telle que $u(e_1) = f_1$, $u(e_2) = f_2$ et $u(e_3) = f_3$. Ecrire les formules analytiques de u.

2. Trouver le rang de la famille de vecteurs (f_1, f_2, f_3). Quel est le rang de u ?

Que peut-on en déduire pour u ?

3. Déduire de la question précédente la dimension du noyau de u.

4. Retrouver le résultat de la question précédente en calculant $\ker u$ et en précisant une base.

5. Trouver $\ker(u - Id)$ et en donner une base.

6. Montrer que $u \circ u = u$. Que peut-on en conclure pour u ?

Soit s définie comme dans le préliminaire.

7. Quelle est la nature de s ? Préciser $\ker(s - Id)$ et $\ker(s + Id)$ et en donner une base.

$\boxed{3}$ Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On considère dans E les fonctions $g_1 : x \longmapsto e^{2x}$, $g_2 : x \longmapsto e^x \cos x$,et $g_3 : x \longmapsto e^x \sin x$.

On veut montrer de plusieurs façons que ces fonctions forment un sytème libre de E.

Supposons donc qu'il existe des réels α, β et γ tels que $\alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3 = 0$, ce qui équivaut à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha e^{2x} + \beta e^x \cos x + \gamma e^x \sin x = 0.$$

1. En prenant des valeurs convenables pour x montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Conclusion pour la famille (g_1, g_2, g_3) ?

2. On veut redémontrer le résultat précédent d'un autre façon.
Si $\alpha \neq 0$, donner un équivalent au voisinage $+\infty$ de $\alpha e^{2x} + \beta e^x \cos x + \gamma e^x \sin x$.
En déduire que $\alpha = 0$. Conclure.

3. Calculer un développement limité de $\alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3$ à l'ordre 2 en 0.

En déduire une nouvelle façon de montrer que (g_1, g_2, g_3) est un sytème libre.

Soit l'application Φ de E dans E qui à $f \in E$ associe $f" - 2f'$. On admettra sans démonstration que Φ est linéaire.

4. Exprimer $\Phi(g_1), \Phi(g_2), \Phi(g_3)$ en fonction de g_1, g_2, g_3.

Si F est le sous-espace vectoriel engendré par g_1, g_2 et g_3 on considère dans la question suivante Φ comme une application de F dans F que l'on notera encore Δ.

5. Trouver le noyau de Δ. Δ est-il un automorphisme de F ?

$\boxed{4}$ PARTIE A

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.

On note $\|.\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$ et B_c la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On dit que u possède la propriété $(\mathcal{P})$ s'il existe une base orthonormée B de $\mathbb{R}^3$ et des réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que la matrice de u dans la base B est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

1. Donner quelques exemples d'isométries de E vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ_1, λ_2 et λ_3 pour qu'un endomorphisme vérifiant la propriété (P) soit une isométrie.

Dans les trois questions suivantes u est un endomorphisme de E vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$.

3. a. Que peut-on dire de la matrice de passage P de la base canonique B_c à la base B ?

b. Quel lien y a-t'il entre la matrice M de u dans la base B_c et la matrice M' de u dans la base B ?

c. Montrer que la matrice M est symétrique.

4. a. Soit un vecteur X de E. On pose $k = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|)$.

Montrer que :

$$\|u(X)\| \leq k \|X\|$$

(on pourra décomposer X dans la base B).

b. Si $k \in [0, 1[$ quelle est la limite de la suite $\|u^n(X)\|$ quand n tend vers plus l'infini ?

PARTIE B : ETUDE D UN EXEMPLE

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans sa base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Soient les vecteurs $e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (-1, -1, 2)$ et $e_3 = (-1, 1, 0)$.

Montrer que $B = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}e_1, \frac{1}{\sqrt{6}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_3\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

6. Calculer $u(e_i)$ en fonction de e_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

En déduire *très simplement* la matrice M' de u dans la base B.

7. Montrer que u vérifie la propriété (P); préciser B et les réels λ_1, λ_2 et λ_3.

8. Montrer qu'il existe un réel positif α tel que $w = \alpha u$ soit une isométrie de $\overrightarrow{E}$.
En donner la nature et ses éléments caractéristiques.

$\boxed{\textbf{5}}$ Pour a et b réels, on note $M(a, b)$ la matrice définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} 3a & 2b & 2b \\ 2b & 3a & 2b \\ 2b & 2b & 3a \end{pmatrix},$$

et on note $f_{a,b}$ l'endomorphisme ayant pour matrice $M(a, b)$ dans une base orthonormée d'un espace euclidien E.

1. Calculer le déterminant de $M(a, b)$ (on donnera le résultat sous forme factorisé).

2. Calculer les valeurs de a et b telles que la $f_{a,b}$ soit une isométrie de E.

3. Dans les cas où $M(a, b)$ est une matrice orthogonale avec $b \neq 0$ préciser la nature de l'endomorphisme $f_{a,b}$.

$\boxed{\textbf{6}}$ On note $M_{\mathbb{R}}(3, 3)$ l'espace vectoriel des matrices de type $(3, 3)$ à coefficients réels et I la matrice identité.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique B de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. Montrer que $\ker f = \text{Vect}(u)$.

La matrice A est-elle inversible ?

2. a. Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$, dont la deuxième coordonnée dans B vaut 1, et tel que
$f(v) = u$.

b. Déterminer le vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la deuxième coordonnée dans B vaut 1, et qui vérifie
$f(w) = v$.

c. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera B'.

d. Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'.

3. a. En utilisant les questions précédentes, et *sans calculs*, écrire la matrice A' de f relativement à la base $B' = (u, v, w)$.

b. Donner la relation liant les matrices A, A', P et P^{-1}. En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a : $A^3 = 0$.

4. Soit $N \in M_{\mathbb{R}}(3, 3)$. On note C_N l'ensemble des matrices $(3, 3)$ qui commutent avec $\cancel{A}$ c'est à dire :

$$C_N = \{M \in M_{\mathbb{R}}(3, 3) \ / MN = NM\}.$$

a. Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $M_{\mathbb{R}}(3, 3)$.

b. Montrer que $C_{A'} = \text{Vect}(I; A', A'^2)$.

(pour $M \in C_{A'}$ on pourra poser $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$).

c. Établir que : $M \in C_A \Longleftrightarrow P^{-1}MP \in C_{A'}$.

En déduire que C_A =Vect(I, A, A^2). Quelle est la dimension de C_A ?

Correction :

$\boxed{1}$ **1.** Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ il existe une unique application linéaire u telle que $u(e_1) = (-1, 1, 3)$, $u(e_2) = (3, -8, -14)$, $u(e_3) = (-2, 5, 9)$ (théorème "détermination d'une application linéaire").

2. Pour $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ on a $u(x, y, z) = u(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xu(e_1) + yu(e_2) + zu(e_3)$ (linéarité de u), soit $u(x, y, z) = x(-1, 1, 3) + y(3, -8, -14) + z(-2, 5, 9) = (-x + 3y - 2z)e_1 + (x - 8y + 5z)e_2 + (3x - 14y + 9z)e_3$.

Les formules analytiques de u sont donc $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -x + 3y - 2z \\ y' & = & x - 8y + 5z \\ z' & = & 3x - 14y + 9z \end{array}\right.$.

3. On a $(x, y, z) \in \ker u$ ssi $u(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ce qui équivaut au système $\left\{\begin{array}{rcl} -x + 3y - 2z & = & 0 \\ x - 8y + 5z & = & 0 \\ 3x - 14y + 9z & = & 0 \end{array}\right.$.
On le résout par la méthode de Gauss en effectuant les combinaisons linéaires : $L_2 \longleftarrow L_1 + L_2, L_3 \longleftarrow 3L_1 + L_2$ et on obtient le système équivalent : $\left\{\begin{array}{rcl} -x + 3y - 2z & = & 0 \\ -5y + 3z & = & 0 \\ -5y + 3z & = & 0 \end{array}\right.$. En prenant $z = t$ pour inconnue auxiliaire on obtient : $y = \frac{3}{5}t, x = -\frac{1}{5}t$.

On a donc $\ker u = \left\{\left(-\frac{1}{5}t, \frac{3}{5}t, t\right) / t \in \mathbb{R}\right\}$.

Comme $\left(-\frac{1}{5}t, \frac{3}{5}t, t\right) = t\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$, $\ker u$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$ (qui en est une base). On a donc $\boxed{\dim\ker u = 1}$.

Comme $\ker u \neq \{(0, 0, 0)\}$ l'application u n'est pas injective.

4. On a $rg\left((u(e_1), u(e_2), u(e_3))\right) = rg\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & -14 & 9 \end{pmatrix} \underset{C_2 \leftarrow 3C_1 + C_2, C_3 \leftarrow 2C_1 - C_3}{=} rg\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -3 \\ 3 & -5 & -3 \end{pmatrix} = 2$.

D'après le théorème du rang on a : $\dim\mathbb{R}^3 = \dim\ker\varphi + rg(\varphi)$ donc $\dim\ker(\varphi) = 1$.

5. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a $u^2(x, y, z) = u(x', y', z')$ (x', y', z' définies par les formules analytiques de u), soit $u^2(x, y, z) = (-x' + 3y' - 2z', x' - 8y' + 5z', 3x' - 14y' + 9z') = (x", y", z")$ avec : $x" = -(-x + 3y - 2z) + 3(x - 8y + 5z) - 2(3x - 14y + 9z) = -2x + y - z$. On trouve, par un calcul analogue : $y" = 6x - 3y + 3z$ et $z" = 10x - 5y + 5z$, ce qui donnent les formules analytiques de u^2.

Pour vérifier que $u^3 = 0$ on montre que $-x" + 3y" - 2z" = x" - 8y" + 5z" = 3x" - 14y" + 9z" = 0$.

6. Supposons que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$, soit $aX_0 + bu(X_0) + cu^2(X_0) = 0$.

En prenant l'image par u^2 des deux membres il reste, vu que $u^3 = 0$: $au^2(X_0) = 0$. Comme $u^2(X_0) \neq 0$ on a $a = 0$. On a donc $bu(X_0) + cu^2(X_0) = 0$. En composant par u on obtient de même $b = 0$, donc $cu^2(X_0) = 0$ d'où $c = 0$.

Le système (f_1, f_2, f_3) est donc un sytème libre que $\mathbb{R}^3$.

De plus il possède 3 éléments et $\dim\mathbb{R}^3 = 3$ donc (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{2}$ On a $s \circ s = (Id_E - 2f) \circ (Id_E - 2f) = Id_E - 2f - 2f + 4f \circ f = Id_E$ (car $f \circ f = Id_E$).

1. (e_1, e_2, e_3) étant une base de $\mathbb{R}^3$, le théorème "détermination d'une application linéaire" assure l'existence et l'unicité de u.

Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a : $u(x, y, z) = u(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xu(e_1) + yu(e_2) + zu(e_3)$ (car u linéaire), soit $u(x, y, z) = x(e_2 - e_3) + y(-e_1 + 2e_2 - e_3) + z(-e_1 + e_2) = (-y - z)e_1 +$

$(x+2y+z)\, e_2 + (-x-y)\, e_3$. D'où les formules analytiques de u : $\boxed{\left\{\begin{array}{rc} x' = & -y-z \\ y' = & x+2y+z \\ z' = & -x-y \end{array}\right.}$.

2. On a $rg\,(f_1, f_2, f_3) = rg \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(C_2 \leftarrow C_2 - C_1)$. Les deux dernières colonnes étant égales on a : $\boxed{rg\,(f_1, f_2, f_3) = 2}$.

Le rang de ce système est aussi égal au rang de u. Comme ce rang n'étant pas égal à 3 l'application u n'est ni injective ni surjective.

3. D'après le théorème du rang on a : $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker u + rgu$. Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et $rg\,(u) = 2$ on a $\boxed{\dim \ker u = 1}$.

4. On a $X = (x, y, z) \in \ker u \iff u\,(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ce qui équivaut au système : $\left\{\begin{array}{cl} -y-z & = 0 \\ x+2y+z & = 0 \\ -x-y & = 0 \end{array}\right.$. En bloquant la deuxième équation et en l'ajoutant à la première le système équivaut à : $\left\{\begin{array}{cl} x+2y+z & = 0 \\ x+y & = 0 \\ -x-y & = 0 \end{array}\right.$, ou encore $\left\{\begin{array}{cl} x+2y+z & = 0 \\ x+y & = 0 \end{array}\right.$.

En prenant $x = t$ comme paramètre on obtient $(x, y, z) = (t, -t, t) = t\,(1, -1, 1)$.

Un base de $\ker u$ est donc $((1, -1, 1))$, et on retrouve bien que $\dim \ker u = 1$.

5. On a $X = (x, y, z) \in \ker (u - Id) \iff u\,(x, y, z) = (x, y, z)$ ce qui équivaut au système $\left\{\begin{array}{cl} -y-z & = x \\ x+2y+z & = y \\ -x-y & = z \end{array}\right.$, ou encore à l'équation $x + y + z = 0$. En prenant par exemple pour paramètres $x = \alpha$ et $y = \beta$, on obtient : $(x, y, z) = (\alpha, \beta, -\alpha - \beta)$. Comme $(\alpha, \beta, -\alpha - \beta) = \alpha\,(1, 0, -1) + \beta\,(0, 1, -1)$, le système (u, v) avec $u = (1, 0, -1)$ et $v = (0, 1, -1)$ est générateur de $\ker (u - Id)$. Comme il est libre (u et v n'étant pas colinéaires) c'est une base de $\ker (u - Id)$.

6. On cherche les formules analytiques de $u \circ u$ en calculant : $x" = -y' - z' = -(x+2y+z) - (-x-y) = -y - z$; de même $y" = x' + 2y' + z' = x + 2y + z$ et $z" = -x' - y' = -x - y$. On en conclut que $\boxed{u \circ u = u}$ et donc que u est une projection.

7. D'après la question préliminaire on a $s \circ s = Id$ donc s est une symétrie (par rapport à $\ker (s - Id)$ et parallèlement à $\ker (s + Id)$).

On a $X \in \ker (s - Id) \iff s\,(X) - X = 0 \iff s\,(X) = X \iff X - 2u\,(X) = X \iff u\,(X) = 0$ donc $\boxed{\ker (s - Id) = \ker u}$.

De même on a $X \in \ker (s + Id) \iff s\,(X) + X = 0 \iff s\,(X) = -X \iff X - 2u\,(X) = -X \iff u\,(X) = X$ donc on a $\boxed{\ker (s + Id) = \ker (u - Id)}$.

$\boxed{4}$ Partie A

1. Les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ayant pour matrice une matrice diagonale dont les éléments de la diagonales valent ± 1 vérifient la propriété (P) (car ces matrices sont orthogonales et la base canonique B_c est orthonormée pour le produit scalaire canonique) : c'est le cas de l'identité et de symétries orthogonales par rapport à un plan ou une droite.

2. L'endomorphisme vérifie (P) ssi la matrice $M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée B est orthogonale ce qui équivaut à $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = 1$, soit $\boxed{\lambda_i = \pm 1}$ pour $i = 1, 2, 3$.

3. a. La matrice de passage P de la base canonique B_c à la base B est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de B dans la base B_c. Ces colonnes forment donc un système orthonormé de $\mathbb{R}^3$ donc la matrice P est orthongonale.

b. On a $\boxed{M' = P^{-1}MP}$ d'après le cours.

c. D'après 3/ b/ on a $M = PM'P^{-1}$ donc $M^T = \left(PM'P^{-1}\right)^T = \left(P^{-1}\right)^T M'^T P^T$.

Comme la matrice M' est symétrique on a $M'^T = M'$ et comme la matrice P est orthogonale on a $P^{-1} = P^T$ donc $M^T = \left(P^T\right)^T M'^T P^{-1} = PM'P^{-1}$ soit $M^T = M$ donc la matrice M est symétrique.

4. a. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ et (x, y, z) les coordonnées du vecteur X dans la base B.

On a $\|u(X)\|^2 = \|u(xe_1 + ye_2 + ze_3)\|^2 = \|xu(e_1) + yu(e_2) + zu(e_3)\|^2$ (car u est linéaire), soit $\|u(X)\|^2 = \|x\lambda_1 e_1 + y\lambda_2 e_2 + z\lambda_3 e_3\|^2$ (car $u(e_1) = \lambda_1 e_1, u(e_2) = \lambda_2 e_2, u(e_3) = \lambda_3 e_3$). La base B étant orthonormée on a donc : $\|u(X)\|^2 = (x\lambda_1)^2 + (y\lambda_2)^2 + (z\lambda_3)^2 = \lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^2 y^2 + \lambda_3^2 z^2$. Or , λ_1^2, λ_2^2 et λ_3^2 sont $\leq [\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|)]^2$ et $x^2 + y^2 + z^2 = \|X\|^2$ donc $\boxed{\|u(X)\| \leq k\|X\|}$.

b. On a $\|u^2(X)\| \leq k\|u(X)\| \leq k^2\|X\|$ et par une récurrence facile on a $0 \leq \|u^n(X)\| \leq k^n\|X\|$ pour tout entier naturel n. Comme $k \in [0, 1[$ on a $\lim k^n = 0$ donc $\lim k^n \|X\| = 0$ et d'après le théorème de l'étau on a $\boxed{\lim \|u^n(X)\| = 0}$.

<u>Partie B : etude d un exemple</u>

5. Les vecteurs e_1, e_2 et e_3 sont orthogonaux deux à deux et de normes respectives $\sqrt{3}, \sqrt{6}$ et $\sqrt{2}$ donc le système $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e_1, \frac{1}{\sqrt{6}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_3\right)$ est orthonormé.

Il est donc libre et comme il a trois élément dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 c'est donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

6. On a immediatement $Me_1 = -3e_1, Me_2 = 3e_2$ et $Me_3 = 3e_3$, donc $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e_1\right) = -\frac{3}{\sqrt{3}}e_1, M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}e_2\right) = \frac{3}{\sqrt{6}}e_2$ et $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e_3\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}e_3$.

7. La matrice M' de u dans la base B est donc $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ donc u vérifie la propriété (P) avec $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = 3$.

8. Les colonnes de M forment un système orthogonal et la norme de chaque colonne vaut 3 donc la matrice $\frac{1}{3}M$ est orthogonale donc $w = \frac{1}{3}u$ est une isométrie de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de w dans la base B précédente est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On reconnaît la matrice de la symétrie orthogonale de plan engendré par (e_1, e_2).

$\boxed{\mathbf{5}}$ **1.** On a $\det M(a,b) = \begin{vmatrix} 3a & 2b & 2b \\ 2b & 3a & 2b \\ 2b & 2b & 3a \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} 3a+4b & 3a+4b & 3a+4b \\ 2b & 3a & 2b \\ 2b & 2b & 3a \end{vmatrix}$, donc $\det M(a,b) = (3a+4b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & 3a & 2b \\ 2b & 2b & 3a \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} (3a+4b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & 3a-2b & 0 \\ 2b & 0 & 3a-2b \end{vmatrix}$, d'où $\boxed{\det M(a,b) = (3a+4b)(3a-2b)^2}$.

2. $f_{a,b}$ est un isométrie ssi la matrice $M(a,b)$ est une matrice orthogonale, ssi ses colonnes forment un système orthonormé de $\mathbb{R}^3$ (muni de son produit scalaire canonique), ce qui donne le système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 9a^2 + 8b^2 & = 1 \ (1) \\ 12ab + 4b^2 & = 0 \ (2) \end{array} \right. .$$

L'équation (2) équivaut à $b\,(3a+b)=0$ soit $b=0$ ou $3a+b=0$.

Si $b=0$, l'équation (1) donne $a=\pm\frac{1}{3}$.

Si $3a+b=0$ on a $b=-3a$ et l'équation (1) donne $9a^2+72a^2=1$, soit $a=\pm\frac{1}{9}$.

Les couples pour lesquels $f_{a,b}$ est une isométrie sont donc $\left(\pm\frac{1}{3},0\right)$, $\left(\frac{1}{9},-\frac{1}{3}\right)$ et $\left(-\frac{1}{9},\frac{1}{3}\right)$.

3. Si $a=1/9$ et $b=-1/3$ on a $\det M\,(1/9,-1/3)=-1$ d'après 1/ donc $f_{a,b}$ est une réflexion plane ou une antirotation. Cherchons l'ensemble des vecteurs invariants : $X\,(x,y,z)$ est invariant ssi $f_{a,b}\,(X)=X$ ce qui donne le système : $\left\{\begin{array}{ll} \frac{x}{3}-\frac{2y}{3}-\frac{2z}{3} & =x \\ -\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}-\frac{2z}{3} & =y \\ -\frac{2x}{3}-\frac{2y}{3}+\frac{z}{3} & =z \end{array}\right.$ qui équivaut $x+y+z=0$. L'ensemble des vecteurs invariants est le plan P d'équation $x+y+z=0$ donc $f_{1/9,-1/3}$ est la réflexion de plans P.

Si $a=-1/9$ et $b=1/3$ on a $M\,(-1/9,1/3)=-M\,(1/9,-1/3)$, donc $\det M\,(-1/9,1/3)=(-1)^3\det M\,(1/9,-1/3)=+1$, donc $f_{-1/9,1/3}$ est une rotation.

Son axe est l'ensemble des vecteurs invariants : comme précédemment on obtient le système $\left\{\begin{array}{ll} -\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}+\frac{2z}{3} & =x \\ \frac{2x}{3}-\frac{y}{3}+\frac{2z}{3} & =y \\ \frac{2x}{3}+\frac{2y}{3}-\frac{z}{3} & =z \end{array}\right.$, équivalent à $\left\{\begin{array}{ll} -2x+y+z & =0 \\ x-2y+z & =0 \\ x+y-2z & =0 \end{array}\right.$, équivalent à $\left\{\begin{array}{ll} -2x+y+z & =0 \\ x-y & =0 \end{array}\right.$.

En prenant $t=x$ pour paramètre on obtient $x=y=z=t$, donc l'axe est la droite engendrée par $\overrightarrow{n}\,(1,1,1)$.

L'angle θ vérifie $2\cos\theta+1=Tr\,(M\,(-1/9,1/3))=-1$ donc $\cos\theta=-1$, soit $\theta\equiv\pi\ \ (2\pi)$.

$\boxed{6}$ **1. a.** On a $(x,y,z)\in\ker f\iff\left\{\begin{array}{l} 2x+10y+7z=0 \\ x+4y+3z=0 \\ -2x-8y-6z=0 \end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l} 2x+10y+7z=0 \\ 2y+z=0 \\ 2y+z=0 \end{array}\right.\begin{array}{l} \\ (L_2\leftarrow L_1-2 \\ (L_3\leftarrow L_1+L \end{array}$

En prenant $y=t$ pour paramètre on obtient $\ker f=\{(2t,t,-2t)\,/t\in\mathbb{R}\}$, droite vectorielle engendrée par $u=(2,1,-2)$.

Comme $\ker f\neq\{0\}$, f n'est pas injective donc pas bijective, donc A n'est pas inversible.

2. a. Posons $v=(x,1,z)$. On a $f\,(v)=u$ ssi $\left\{\begin{array}{l} 2x+10+7z=2 \\ x+4+3z=1 \\ -2x-8-6z=-2 \end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l} 2x+7z=-8 \\ x+3z=-3 \\ -2x-6z=6 \end{array}\right.\iff$ $\left\{\begin{array}{l} 2x+7z=-8 \\ x+3z=-3 \end{array}\right.$. On trouve $z=-2$ et $x=3$ donc $\boxed{v=(3,1,-2)}$.

b. De même, en posant $w=(x,1,z)$ on obtient le système $\left\{\begin{array}{l} 2x+10+7z=3 \\ x+4+3z=1 \\ -2x-8-6z=-2 \end{array}\right.\iff$ $\left\{\begin{array}{l} 2x+7z=-7 \\ x+3z=-3 \\ -2x-6z=6 \end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l} 2x+7z=-7 \\ x+3z=-3 \end{array}\right.$ dont les solutions sont $x=0$ et $z=-1$ donc $\boxed{w=(0,1,-1)}$.

c. La famille est constituée de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, il suffit de prouver qu'elle est libre. Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha u+\beta v+\gamma w=(0,0,0)$; on obtient le système $\left\{\begin{array}{l} 2\alpha+3\beta=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \\ -2\alpha-2\beta-\gamma=0 \end{array}\right.\underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\iff}\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ 2\alpha+3\beta=0 \\ -2\alpha-2\beta-\gamma=0 \end{array}\right.\underset{L_3\leftarrow L_1+L_3}{\iff}\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ 2\alpha+3\beta=0 \\ -\alpha-\beta=0 \end{array}\right.$.

On obtient $\alpha=\beta=\gamma=0$ donc le système (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

d. On a par définition de la matrice de passage : $P=P_B^{B'}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. a. Comme $f(u) = (0,0,0)$, $f(v) = u$ et $f(w) = v$ la matrice de f dans la base B' est

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. D'après le cours on a $\boxed{A' = P^{-1}AP}$.

On en déduit (en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}) que $A = PA'P^{-1}$.

On a alors : $A^2 = (PA'P^{-1})(PA'P^{-1}) = PA'(P^{-1}P)A'P^{-1} = PA'IA'P^{-1} = PA'^2P^{-1}$ (on a utiliser l'associativité de la mutltiplication des matrices). Or on constate que $A'^2 = (0)$ (matrice nulle) donc $\boxed{A^3 = (0)}$.

4. a. La matrice nulle (0) appartient à C_N car $N.(0) = (0).N = (0)$.

Soient $M, M' \in C_N$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $(\lambda M + M')N = \lambda MN + M'N = \lambda NM + NM'$ (car M et M' appartiennent à C_N) donc $(\lambda M + M')N = N(\lambda M + M')$. $\lambda M + M'$ commute avec N donc $\lambda M + M' \in C_N$.

Conclusion : C_N est un sev de $M_{\mathbb{R}}(3,3)$.

b. On a $M \in C_{A'} \iff MA' = A'M$. Or on a : $MA' = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$ et $A'M = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a donc $M \in C_{A'} \iff d = g = h = 0$ et $a = b = f = e = i$, ce qui donne $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Comme $A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a donc $M = aI + bA' + cA'^2$.

c. On a $M \in C_A \iff MA = AM \iff MPA'P^{-1} = PA'P^{-1}M$ (car $A = PA'P^{-1}$). En multipliant à droite par P et à gauche par P^{-1} on obtient : $P^{-1}MPA' = A'P^{-1}MP$ soit $(P^{-1}MP)A' = A'(P^{-1}MP)$ ce qui équivaut à dire que $P^{-1}MP \in C_{A'}$.

D'après 4. b. on a $P^{-1}MP \in C_{A'} \iff \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / P^{-1}MP = \alpha I + \beta A' + \gamma A'^2$.

Comme précedemment on obtient : $M = P(\alpha I + \beta A' + \gamma A'^2)P^{-1} = \alpha I + \beta PA'P^{-1} + \gamma PA'^2P^{-1}$, soit $M = \alpha I + \beta PA'P^{-1} + \gamma(PAP^{-1})^2 = \alpha I + \beta A + \gamma A^2$.

On a donc : $\boxed{M \in C_A \iff M \in \mathrm{Vect}(I, A, A^2)}$.

Le système (I, A, A^2) est donc un système générateur de C_A. On vérifie que $\alpha I + \beta A + \lambda A^2 = (0) \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$ donc ce système est libre et c'est donc une base e C_A.

Conclusion : $\boxed{\dim C_A = 3}$.