Exercices Suites réelles

$\boxed{1}$ Soit la suite (u_n) définie par $u_0 \in]1,2[$ et, pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1.$$

1. Représenter graphiquement les premiers termes de cette suite.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 0$ puis pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n \geq 1$.

2. b. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

On veut démontrer le résultat précédent d'une autre façon.

3. a. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$|u_{n+1} - 1| \leq (u_n - 1)^2 .$$

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leq |u_0 - 1|^{2^n}$.

Retrouver le résultat de la question 2/ b/.

3. b. On prend $u_0 = 1,5$. Trouver un entier naturel N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow |u_n - 1| \leq 10^{-10}.$$

$\boxed{2}$ On considère la suite (x_n) définie par récurrence par :

$$x_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{x_n}{(1 + x_n)^2}.$$

1. Etudier la convergence de la suite (x_n) et trouver sa limite éventuelle.

2. Montrer que la suite (v_n) définie, pour $n \leq 1$, par $v_n = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}$ est convergente et trouver la limite.

3. Montrer que la suite (x_n) est équivalente à $\frac{1}{2n}$.

On rappelle que si une suite (α_n) est telle que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (\alpha_n - \alpha_{n-1}) = l$ alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = l$ (voir feuille 3, I/ 3/ b/).

Que pensez-vous de la vitesse de convergence de (x_n) par rapport à celle de (u_n) ?

Vérifier en calculant à la calculatrice une valeur approchée de x_{100}.

$\boxed{3}$ Soit n un entier naturel non nul et a un réel strictement positif.

On se propose d'étudier les solutions de l'équation :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \cdots + \frac{1}{x+2n} = a \ (E_n).$$

A cet effet on considère la fonction f_n de la variable réelle x définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \cdots + \frac{1}{x+2n} - a.$$

1. Dresser le tableau de variation de f_n.

En déduire le nombre de solutions de l'équation (E_n).

2. Montrer qu'il y a une unique solution, que l'on notera x_n, dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

3. Démontrer que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

En déduire que pour tout réel x strictement positif on a :

$$f_n(x) - \frac{1}{x} + a < \ln\left(1 + \frac{2n}{x}\right) < f_n(x) - \frac{1}{x+2n} + a,$$

puis que : $a - \frac{1}{x_n} < \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}$.

4. Déduire de la question précédente que pour tout entier naturel non nul n :

$$x_n > \frac{2n}{e^a - 1}.$$

Quelle est la limite de la suite (x_n) ?

5. Quelle est la limite de la suite $\ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right)$? Prouver qu'il existe un réel α strictement positif, que l'on calculera, tel que : $x_n \sim \alpha n$.

$\boxed{4}$ On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 2xe^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ dans un ensemble à préciser. Donner des propriétés de f^{-1} (bijection réciproque de f) et en donner le tableau de variation.

2. Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]0,1[$ tel que

$$\alpha e^{\alpha} = 1.$$

On définit la suite (u_n) par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ pour tout entier naturel n.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0,1[$.

4. a. Montrer que pour tout réel x de $[0,1]$ on a $f(x) - x \geq 0$, et que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$. Que peut-on en déduire sur le sens de variation de (u_n) ?

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente puis qu'elle converge vers 0.

On pose pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

5. a. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}}.$$

b. En déduire par récurrence que $u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$.

c. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En déduire que la suite (S_n) est majorée puis qu'elle est convergente.

Soit L sa limite. Montrer que :

$$\alpha \leq L \leq 2.$$

d. Donner un équivalent de (u_n).

$\boxed{5}$ On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application φ_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1,$$

et l'équation $\varphi_n(x) = 0$ soit $x^n + x^{n-1} + \ldots + x = 1$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que cette équation a une unique solution x_n sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout entier naturel n on a $x_n \in]0, 1]$. Calculer x_1 et x_2.

2. Pour $x \in]0, 1]$, comparer $\varphi_n(x)$ et $\varphi_{n+1}(x)$.

En déduire que la suite (x_n) est décroissante. Conclusion pour cette suite ?

3. Etablir avec soin que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$.

4. Montrer que pour tout entier n non nul on a : $x_n(1 - x_n^n) = 1 - x_n$.

En déduire la limite de la suite (x_n).

On pose $x_n = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

5. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + \varepsilon_n)^{n+1} = 2^{n+1}\varepsilon_n$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)\varepsilon_n \ln(1 + \varepsilon_n) = (n+1)\varepsilon_n \ln 2 + \varepsilon_n \ln \varepsilon_n.$$

6. Déterminer alors la limite de $(n+1)\varepsilon_n$ puis celle de $(1 + \varepsilon_n)^{n+1}$.

7. Déduire des questions précédentes que $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n+1}}$ puis que $x_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} + o\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$.

Dans les questions suivantes on pose $n = 2$. On note $\alpha = x_2$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

8. a. Montrer que $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

b. Soit la suite récurrente (u_p) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{p+1} = f(u_p)$.

Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, |u_{p+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_p - \alpha|$ (*indication* : on pourra écrire, après l'avoir justifié, que $\alpha = f(\alpha)$).

c. En déduire la limite de la suite (u_p) quand p tend vers $+\infty$.

$\boxed{6}$ **Partie 1.** Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on considère la suite (y_n) définie par :

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 1$ on a $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$. Illustrer graphiquement.

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n \leq \ln(n) + 1.$$

Partie 2.

On considère la suite (x_n) définie par son premier terme $x_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}.$$

3. Représenter graphiquement les premiers termes de cette suite. Emettre des conjectures sur le sens de varition et la limite de (x_n).

4. Etudier le sens de variation de (x_n). En raisonnant par l'absurde montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

5. Pour tout entier naturel k exprimer $x_{k+1}^2 - x_k^2$ en fonction de x_k^2.

En déduire que pour tout entier naturel n non nul on a : $x_n^2 = 2n + 1 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$.

6. Retrouver que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

7. A l'aide du résultat des questions 2/ et 5/ montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on a :

$$x_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

(*Indication* : on notera que, d'après 5/ on a $x_k^2 \geq 2k$ pour tout entier naturel $k \geq 1$).

8. En déduire un encadrement de (x_n) puis que $(x_n) \sim \sqrt{2n}$.

Partie 3.

Cette partie est indépendante des deux autres.

On considère maintenant la suite récurrente (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 3/2$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1.$$

9. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

10. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1} - 1) \leq (u_n - 1)^2$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leq \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

Trouver un rang n tel que $|u_n - 1| < 10^{-6}$. Faites un commentaire sur la vitesse de convergence de la suite $|u_n - 1|$.

11. Montrer que pour tout réel $0 < a < 1$ on a : $|u_n - 1| = o\left(a^n\right)$.

$\boxed{7}$ Soit la suite (x_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 3}{2\left(x_n + 1\right)} \end{array} \right. .$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 on a : $x_n \geq 1$.

2. Montrer que (x_n) est convergente et trouver sa limite.

3. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $|x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}\left|x_n - 1\right|$.

Retrouver les résultats de la question précédente.

$\boxed{8}$ Pour tout entier naturel $n \geq 2$ on définit sur l'intervalle $[0;1]$ la fonction f_n par

$$f_n\left(x\right) = x^n - nx + 1.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$ l'équation $f_n\left(x\right) = 0$ a une unique solution x_n sur $[0,1]$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\}, 0 < x_n \leq 1$.

2. En s'inspirant de l'exercice IX/ de la feuille 9 montrer que la suite (x_n) est convergente.

3. En remarquant que pour tout entier $n \geq 2$, $x_n = \frac{x_n^n + 1}{n}$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x_n \leq \frac{2}{n}.$$

4. Déterminer la limite de la suite (x_n) et montrer que $x_n \sim \dfrac{1}{n}$.

On veut dans la suite améliorer ce résultat. On pose, pour $n \geq 2$, $y_n = x_n - \dfrac{1}{n}$.

5. a. Montrer que les suites (ny_n) et $(n^2 y_n)$ convergent vers 0.

b. Vérifier que pour tout entier $n \geq 2$, $y_n = \frac{1}{n^{n+1}} e^{n\ln(1+ny_n)}$.

En déduire que $y_n \sim \frac{1}{n^{n+1}}$, puis que $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right)$ (une telle écriture s'appelle *développement asymptotique de la suite* (x_n)).

$\boxed{9}$ Soient (u_n) et (v_n) les deux suites réelles définies par :

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$$

où a et b sont deux réels donnés tels que $a > b > 0$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n on a $u_n > v_n$.

2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

3. Montrer que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $l = \sqrt{ab}$.

Dans la suite on prend $a = 2$ et $b = 1$.

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{(u_n - v_n)^2}{2}.$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - v_n| \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}.$$

A l'aide de la calculatrice, trouver un entier n tel que u_n et v_n soient des valeurs approchées (par excès et par défaut) de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près.

10 *Question préliminaire* : montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels compris entre 0 et 1.

Montrer que :

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

On considère la suite (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right).$$

2. Démontrer que la suite (S_n) est décroissante.

Que peut-on en déduire au point de vue de sa convergence ?

3. A l'aide de la question 1/ montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \geq \frac{1}{2^n}.$$

4. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1[$ on a :

$$\ln(1 - x) \leq -x.$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq e^{-1/2}.$$

Donner un encadrement de la limite de la suite (S_n).

11 Soit k un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation $\arctan x = x - k\pi$ a une unique solution x_k sur l'intervalle $\left]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

Trouver le limite de la suite (x_k) et en trouver un équivalent.

2. Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} (x_k - k\pi) = \frac{\pi}{2}$.

3. Montrer que : $\forall x > 0, \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

En déduire que, si on pose $\tau_k = \frac{\pi}{2} - (x_k - k\pi)$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \arctan\left(\frac{1}{(k+1/2)\,\pi}\right) \leq \tau_k \leq \arctan\left(\frac{1}{k\pi}\right).$$

4. Donner un équivalent de τ_k lorsque k tend vers $+\infty$ (s'exprimant simplement en fonction de k).

En déduire que : $x_k = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k\pi} + o\left(\frac{1}{k}\right)$.

Dans la suite on fixe une valeur de k dans $\mathbb{N}^*$ et on cherche une valeur approchée de $\theta_k = x_k - k\pi$.

On définit la fonction f par $f(x) = \arctan(x + k\pi)$. On remarquera que $f(\theta_k) = \theta_k$.

5. Montrer qu'il existe un réel $\delta_k \in [0,1[$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 < f'(x) \leq \delta_k.$$

On définit la suite réelle (u_n) par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \theta_{k+1} - u_{n+1} \leq \delta_k\,(\theta_k - u_n).$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers θ_k.

12 **1.** Montrer que pour tout entier naturel non nul n et tout réel α de l'intervalle $]0,1[$:

$$(1-\alpha)^n \geq 1 - n\alpha$$

de deux façons : **(i)** par récurrence; **(ii)** en étudiant une fonction.

On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n.$$

3. Déduire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est croissante.

4. En écrivant $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)^n$ pour tout entier naturel n non nul montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \leq 2.$$

En déduire que la suite (u_n) est majorée. Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

13 Pour x réel positif ou nul on pose :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

1. Montrer que pour tout réel positif ou nul on a : $|f(x) - x| \leq x^3$.

En déduire un encadrement de $f(x)$ valable pour $x \geq 0$.

2. Montrer à l'aide d'un encadrement que la suite (y_n) définie pour $n \geq 1$ par : $y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^3}{n^6}$ converge vers 0.

3. Déduire des questions précédentes que la suite (x_n) définie pour $n \geq 1$ par $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ est convergente et déterminer sa limite l.

4. Montrer que $x_n - l \sim \frac{1}{2n}$ (on pourra admettre dans cette question seulement que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$).

$\boxed{\mathbf{14}}$ Soit la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}.$$

1. Exprimer u_n à l'aide de factorielles.
2. Etudier le sens de variation de (u_n).
Démontrer que la suite (u_n) est convegente.
On pose $v_n = (n+1)\, u_n^2$.
3. Etudier le sens de variation de (v_n) et montrer que la suite (v_n) est convegente.
En déduire la limite de la suite (u_n).
4. a. Simplifier :

$$\prod_{k=2}^{2n} \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

b. En remarquant que $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$ déduire de la question précédente que

$$\forall n \geq 2, u_n^2 \geq \frac{1}{4n}.$$

puis que la limite de la suite (v_n) est une constante C strictement positive.
5. Donner un équivalent de (u_n) faisant intervenir C.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Soit la suite (x_n) définie par $x_0 \in [0,1]$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}.$$

1. Montrer que la suite (x_n) est convergente et calculer sa limite.
On veut retrouver le résultat précédent de deux autres façons.
2. Trouver un réel $k \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - 1| \leq k\, |x_n - 1|\,.$$

Retrouver le résultat de la question 1/.
3. a. Calculer, pour x réel, $\cos(2x)$ en fonctin de $\cos(x)$.
b. On pose $x_0 = \cos(\alpha)$ avec $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$x_n = \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right).$$

Retrouver le résultat de la question 1/.

$\boxed{\mathbf{16}}$ On définit la suite réelle (u_n) par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{2u_n + 5}.$$

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-5/2\}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+5}$.

1. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n + 1/2}{u_n + 1}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison. En déduire v_n en fonction de n.

2. Calculer u_n en fonction de v_n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n puis la limite de (u_n).

$\boxed{\mathbf{17}}$ **1.** Démontrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

On veut démontrer cette formule d'une autre façon.

2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

Par un procédé "en cascade" donner une autre démonstration de la formule du 1/.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Quelle est la limite de la suite (x_n) ?

$\boxed{\mathbf{18}}$ Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Etudier le sens de variation de (u_n).

En déduire que (u_n) est convergente.

$\boxed{\mathbf{19}}$ Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{3 - u_n}.$$

On veut étudier cette suite de plusieurs façons.

1. Première méthode

a. Montrer que (u_n) est majorée par 0.

b. Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.

2. Deuxième méthode

On considère la suite auxiliaire (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

b. Calculer la limite de (v_n) et en déduire celle de (u_n).

3. Troisième méthode

a. Trouver un réel $k \in]0,1[$ tel que pour tout entier naturel n : $|u_{n+1}| \leq k \times |u_n|$.

b. Retrouver le résultat des questions précédentes.

$\boxed{\mathbf{20}}$ Soit la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^3}$ et la suite (w_n) définie pour $n \geq 1$ par $w_n = v_n + \dfrac{1}{n^2}$.

1. Etudier le sens de variation des suites (v_n) et (w_n).

En déduire que la suite (v_n) est convergente. Soit l sa limite. Donner une majoration de $|v_n - l|$ et de $|w_n - l|$ en fonction de n.

2. Donner un rang à partir duquel v_n et w_n sont des valeurs approchées par défaut et par excès de l avec une précision de 10^{-5}.

$\boxed{\mathbf{21}}$ **1.** Montrer que pour tout pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4 on a $n! \geq n^2$.

En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!}$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e}{n!}\int_0^1 u^n e^{-u} du.$$

En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$.

$\boxed{\mathbf{22}}$ Préciser la nature des séries suivantes :

a. $\sum\limits_{n\geq 1} \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$; **b.** $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^3 - n}$; **c.** $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$; **d.** $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ (montrer que pour tout entier naturel k on a $\sqrt{k} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \sqrt{x}dx \leq \sqrt{k+1}$ et en déduire un équivalent de la suite $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}$); **e.** $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\arctan n}{n^2}$; **f.** $\sum\limits_{n\geq 1} \tan\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$; **g.** $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(1+n)\sin n}{n^2\sqrt{n}}$; **h.** $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{e^n}$ (*indication* : trouver la limite de $\dfrac{n^2\sqrt{n}}{e^n}$.

$\boxed{\mathbf{23}}$ **1.** Montrer que pour tout entier naturel k on a

$$\sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{x}dx \leq \sqrt{k+1}$$

En déduire un équivalent de $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}$.

2. Etudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n^\alpha}$ suivant les valeurs du réel α.

$\boxed{\mathbf{24}}$ Soit la série $\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left(2 - e^{-\frac{1}{n}}\right)$.

A l'aide d'un developpement limité de $e^{-\frac{1}{n}}$ donner la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(2 - e^{-\frac{1}{n}}\right)$.

$\boxed{\textbf{25}}$ On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 2xe^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ dans un ensemble à préciser. Donner des propriétés de f^{-1}, bijection réciproque de f, et en donner le tableau de variation.

2. Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]0,1[$ tel que

$$\alpha e^{\alpha} = 1.$$

On définit la suite (u_n) par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ pour tout entier naturel n.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0,1[$.

4. Montrer que pour tout réel x de $[0,1]$ on a $f(x) - x \geq 0$, et que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.

Que peut-on en déduire sur le sens de variation de (u_n) ?

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente puis qu'elle converge vers 0.

6. Donner un équivalent de f en 0 puis un équivalent de f^{-1} en 0.

$\boxed{\textbf{26}}$ On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}.$$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$.

1. Montrer que f est croissante sur $[0,1]$.

Représenter graphiquement les premiers termes de cette suite.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2. Montrer que pour tout entier naturel p non nul on a : $f\left(\dfrac{1}{p}\right) \leq \dfrac{1}{p+1}$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Retrouver la limite de la suite (u_n).

On veut trouver dans les questions suivantes un équivalent de (u_n).

4. En remarquant que pour tout entier naturel n on a : $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$, montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 on a :

$$\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

5. En utilisant l'inégalité $\dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$ valable pour tout entier k supérieur ou égal à 2 montrer que :

$$\forall n \geq 2, \frac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln n.$$

Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est équivalente à $\dfrac{1}{n}$.

Correction :

$\boxed{\textbf{1}}$ **2. a/** Soit la propriété $P(n)$: "$u_n > 0$".

Comme $u_0 \in \left]0;1\right[$ la propriété $P(0)$ est vraie. Supposons qu'elle soit vraie à un certain rang n. On a $u_{n+1} = \frac{u_n^2 - u_n + 1}{u_n}$; le trinôme $x^2 - x + 1$ étant toujours > 0 on obtient, avec $u_n > 0$, $u_{n+1} > 0$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

Pour tout entier naturel $n \geq 0$ on a $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n} = \frac{(u_n - 1)^2}{u_n} \geq 0$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1}$.

b/ Pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} - 1 = \frac{1 - u_n}{u_n} \leq 0$ d'après 2. a/ donc la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 1 elle est convergente. Soit l sa limite. En passant l'égalité $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1$ à la limite on obtient $l = l + \frac{1}{l} - 1$ soit $l = 1$.

Conclusion : *la suite* (u_n) *converge vers* 1.

3. a/ Soit la propriété $P(n)$: " $|u_n - 1| \leq |u_0 - 1|^{2^n}$ ".

Pour $n = 0$ elle s'écrit : $|u_0 - 1| \leq |u_0 - 1|^{2^0}$ soit $|u_0 - 1| \leq |u_0 - 1|^{2^0}$ donc $P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ pour un certain entier n. On a $|u_{n+1} - 1| = \frac{|u_n - 1|^2}{u_n}$; d'après l'hypothèse de récurrence on a $|u_n - 1| \leq |u_0 - 1|^{2^n}$ donc $|u_n - 1|^2 \leq \left(|u_0 - 1|^{2^n}\right)^2 = |u_0 - 1|^{2^{n+1}}$ et $u_n \geq 1$ donc $0 < \frac{1}{u_n} \leq 1$ d'où $\frac{|u_n - 1|^2}{u_n} \leq |u_0 - 1|^{2^{n+1}}$. On a donc $|u_{n+1} - 1| \leq |u_0 - 1|^{2^{n+1}}$ et la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Posons $k = |u_0 - 1| \in \left]0;1\right[$ (car $u_0 \in \left]1;2\right[$). On a $|u_0 - 1|^{2^n} = e^{2^n \ln|u_0 - 1|}$; or $2^n \ln|u_0 - 1| \to -\infty$ (car $\ln|u_0 - 1| < 0$) donc $|u_0 - 1|^{2^n} = e^{2^n \ln|u_0 - 1|} \to 0$. L'encadrement $0 \leq |u_n - 1| \leq |u_0 - 1|^{2^n}$ et le théorème de l'étau montrent que $|u_n - 1| \to 0$ soit $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$.

b/ D'après la question précédente on a $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$ pour tout entier naturel n. Pour avoir $|u_n - 1| < 10^{-10}$ *il suffit* d'avoir $\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} < 10^{-10}$ ce qui équivaut à $2^{2^n} > 10^{10}$ soit $n > 6$ (à la calculatrice).

$\boxed{2}$ **1.** Par une récurrence évidente on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

On a pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{(1 + u_n)^2} < 1$ (car $1 + u_n \geq 1$) donc *la suite* (u_n) *est décroissante.*

De plus elle est minorée (par 0) donc (u_n) *est convergente.*

Posons $l = \lim u_n$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{(1 + u_n)^2}$ on obtient $l = \dfrac{l}{(1 + l)^2}$ ce qui équivaut à $l = l(1 + l)^2$ou encore à $l^2(2 + l) = 0$ soit $l = 0$ ou $l = -2$. Comme la suite (u_n) est à termes positifs on a $l \geq 0$ donc $\boxed{l = 0}$.

2. On a pour tout entier naturel non nul n, $v_n = \dfrac{(1 + u_{n-1})^2}{u_{n-1}} - \dfrac{1}{u_{n-1}} = \dfrac{2u_{n-1} + u_{n-1}^2}{u_{n-1}} = 2 + u_{n-1}$. Comme (u_n) tend vers 0 il en est de même de (u_{n-1}) donc $\boxed{\lim v_n = 2}$.

3. Comme $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}} \longrightarrow 2$ alors $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_n}\right) \longrightarrow 2$ (d'après le rappel) c'est à dire $\frac{nx_n}{2} \longrightarrow 1$ ou encore $\frac{x_n}{2/n} \longrightarrow 1$ ce qui équivaut à $\boxed{x_n \sim \dfrac{1}{2n}}$.

La suite (x_n) tend donc vers 0 "comme la suite $\frac{1}{2n}$", c'est à dire lentement. Par exemple on a $x_{100} \simeq 0,0049011$, donc x_{100} est une valeur approchée 0 à 5.10^{-3} près alors que u_7 est une valeur approchée de 1 à 10^{-10} près.

$\boxed{3}$ **1.** f_n est continue et dérivable sur $D = \mathbb{R} - \{0, -1, \ldots, -2n\}$ et pour tout $x \in D$:

$$f_n'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \ldots - \frac{1}{(x+2n)^2},$$

donc $f_n^{'}(x) < 0$ pour tout $x \in D$.

Sur $]-\infty, -2n[$ f_n est continue, strictement décroissante et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -a$ et $\lim\limits_{x \to -2n} f_n(x) = -\infty$, donc f_n induit une bijection de $]-\infty, -2n[$ sur $]-\infty, -a[$. Comme $0 \in]-\infty, -a[$, l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $]-\infty, -2n[$.

De même f_n induit une bijection de chacun des intervalles $]-2n, -2n+1[\,,]-2n+1, -2n+2[\,, \ldots]-1, 0$ sur $\mathbb{R}$ donc l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur chacun de ces intervalles. Enfin f_n induit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-a, +\infty[$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $]0, +\infty[$.

En définitive l'équation $f_n(x) = 0$ a $2n+1$ solutions sur $\mathbb{R}$.

2. D'après 1/ l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $]0, +\infty[$.

3. Posons $\varphi(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0, \varphi'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{x(x+1)^2}$, soit $\varphi'(x) = \frac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0$ pour $x < 0$. φ est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ (car $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$) alors : $\forall x > 0, \varphi(x) > 0$, soit $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x)$.

On démontrerait de même que $\forall x > 0$, $\ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.

On a donc les encadrements : $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+2} < \ln(x+2) - \ln(x+1) < \frac{1}{x+1}, \ldots, \frac{1}{x+2n} < \ln(x+2n) - \ln(x+2n-1) < \frac{1}{x+2n-1}$ (en remplaçant x successivement par $x+1, \ldots, x+2n-1$). En ajoutant membres à membres ces encadrements :

$$\begin{aligned} f_n(x) - \frac{1}{x} + a \quad &< \quad \ln(x+2n) - \ln x < f_n(x) - \frac{1}{x+2n} + a, \text{ soit :} \\ f_n(x) - \frac{1}{x} + a \quad &< \quad \ln\left(1 + \frac{2n}{x}\right) < f_n(x) - \frac{1}{x+2n} + a. \end{aligned}$$

En remplaçant x par x_n ($> 0 \Longrightarrow$) dans l'encadrement on obtient, vu que $f_n(x_n) = 0$:

$$a - \frac{1}{x_n} < \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}.$$

4. De la deuxième inégalité de l'encadrement précédent on déduit : $\ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a$, et prenant l'exponetielle (strictement croissante sur $\mathbb{R}$) on obtient : $1 + \frac{2n}{x_n} < e^a$, soit $\frac{2n}{x_n} < e^a - 1$. Les deux membres étant strictement positif, en prenant l'inverse il vient : $\frac{x_n}{2n} > \frac{1}{e^a-1}$, soit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n > \frac{2n}{e^a-1}}$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n}{e^a-1} = +\infty$, donc, d'après le théorème de comparaison : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty}$.

5. Comme les suites $a - \frac{1}{x_n}$ et $\frac{1}{x_n+2n}$ convergent vers 0 (car $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$), on a, d'après l'encadrement $a - \frac{1}{x_n} < \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n+2n}$, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) = a}$ (théorème de l'étau).

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) = e^a$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln \frac{2n}{x_n} = e^a - 1$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n}{\frac{2n}{e^a-1}} = 1$ soit $\boxed{x_n \sim \frac{2n}{e^a-1}}$.

$\boxed{4}$ **1.** La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ (produit de fonctions dérivables) et :

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) = 2e^x(x+1).$$

On a donc : $\forall x \in [0,1], f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0,1]$. f étant continue c'est donc une bijection de $[0,1]$ sur $[f(0), f(1)] = [0, 2e]$.

La bijection réciproque f^{-1} de f est une bijection de $[0,2e]$ dans $[0,1]$, continue, strictement croissante.

2. L'équation $xe^x = 1$ est équivalente à $f(x) = 2$. Comme $2 \in [0, 2e]$, cette équation a une unique solution α dans $[0,1]$ (l'antécédent de 2 par f).

Comme $f(0)$ et $f(1)$ sont différents de 2 on a $\alpha \in]0,1[$.

3. Récurrence sur n. Soit la propriété $P(n)$: "$0 < u_n < 1$".

Elle est vraie pour $n = 0$ d'après 2/.

Supposons P_n vraie pour un certain entier n : $0 < u_n < 1$. La fonction f^{-1} étant strictement croissante sur $[0, 2e]$ on a : $f^{-1}(0) < f^{-1}(u_n) < f^{-1}(1)$. Or $f^{-1}(0) = 0$ et $f^{-1}(1) \in]0,1[$ (voir TV de f^{-1}) donc $0 < u_{n+1} < 1$ et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.

4. a. On a : $\forall x \in [0,1], f(x) - x = x(2e^x - 1)$. Pour $x \geq 0$ on a $e^x \geq 1$ donc $2e^x - 1 > 0$ d'où $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

On a $f(x) - x = 0$ ssi $x(2e^x - 1) = 0$. Comme $2e^x - 1 \neq 0$ sur $[0,1]$ c'est équivalent à $x = 0$.

En remplaçant x par u_n dans l'inégalité $f(x) \geq x$ (possible car $u_n \in [0,1]$) on obtient $f(u_n) \geq u_n$, et en prenant l'image par f^{-1} (croissante) il vient $u_n \geq f^{-1}(u_n) = u_{n+1}$. La suite (u_n) est décroissante.

4. b. Comme elle décroissante et minorée (par 0) elle est donc convergente.

Sa limite l vérifie $f^{-1}(l) = l$ (car f^{-1} continue en l) soit $f(l) = l$ en composant par f, donc $l = 0$ d'après la question précédente.

5. a. Par définition de u_n on a pour tout entier naturel n, $f(u_{n+1}) = u_n$ soit $2u_{n+1}e^{u_{n+1}} = u_n$, ou $\boxed{u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}}$.

5. b. Soit $P_n : u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$. P_0 est vraie car $u_0 = \alpha$ et $\alpha e^{\alpha} = 1$ soit $\alpha = e^{-\alpha}$.

Supposons P_n vraie pour un certain entier n on a : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$, soit $u_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{e^{-S_n}}{2^n}e^{-u_{n+1}}$ (hypothèse de récurrence) ou : $u_{n+1} = \frac{e^{-S_n - u_{n+1}}}{2^{n+1}} = \frac{e^{-S_{n+1}}}{2^{n+1}}$ et P_{n+1} est vraie.

Conclusion : la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.

5. c. Comme pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq 0$ on a $e^{-u_{n+1}} \leq 1$ donc $\frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}u_n$, soit $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

Par une récurrence évidente on en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

En sommant les inégalités $u_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$ on obtient : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^k}\right)$, soit $S_n \leq \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison 1/2), donc $S_n \leq 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq 2$. La suite (S_n) est donc majorée. De plus elle est croissante $(S_{n+1} - S_n = u_n \geq 0)$ donc la suite (S_n) est convergente.

Pour tout entier naturel n on a $\alpha = S_0 \leq S_n \leq 2$, et en passant à la limite $(n \longrightarrow +\infty)$ il vient $\boxed{\alpha \leq L \leq 2}$.

5. d. On a $\boxed{u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n} \sim \frac{e^{-L}}{2^n}}$ (car e^{-S_n} converge vers e^{-L}).

$\boxed{5}$ **1.** L'application φ_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ (fonction polynôme) strictement croissante (car $\varphi_n'(x) = nx^{n-1} + \ldots + 1 > 0$). De plus $\varphi_n(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_n(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection φ_n est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-1, +\infty[$ donc l'équation $\varphi_n(x) = 0$ a une unique solution x_n sur $\mathbb{R}_+$ (l'antécédent de $0 \in [-1, +\infty[$ par φ_n).

Comme pour tout entier n, $\varphi_n(0) < 0$ et $\varphi_n(1) = n - 1 \geq 0$ on a $x_n \in]0, 1]$.

On a immédiatement $\boxed{x_1 = 1}$. x_2 est la solution positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ soit $\boxed{x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

2. Pour $x \in]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) \leq 0$, soit $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

En remplaçant x par x_n ($\in]0, 1]$) on en déduit que $0 = \varphi_n(x_n) \leq \varphi_{n+1}(x_n)$ ou encore $\varphi_{n+1}(x_{n+1}) \leq \varphi_{n+1}(x_n)$ (car $\varphi_{n+1}(x_{n+1}) = 0$). Comme la fonction φ_{n+1} est strictement croissante on en déduit que $x_{n+1} \leq x_n$ donc la suite (x_n) est décroissante.

Comme elle est minorée par 0 alors elle est convergente.

3. Comme la suite (x_n) est décroissante on a $0 \leq x_n \leq x_2$ pour $n \geq 2$ donc : $0 \leq x_n^n \leq x_2^n$. Or $x_2 \in [0, 1[$ donc $x_2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et (x_n^n) tend vers 0 d'après le théorème de l'étau.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est solution de l'équation $\varphi_n(x) = 0$ donc on a $x_n^n + x_n^{n-1} + \ldots + x_n = 1$. Or $x_n^n + x_n^{n-1} + \ldots + x_n = \frac{x_n - x_n^{n+1}}{1-x_n}$ si $n \geq 2$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison x_n) donc $\frac{x_n - x_n^{n+1}}{1-x_n} = 1$ soit $\boxed{x_n(1 - x_n^n) = 1 - x_n}$ (cette relation est valable aussi si $n = 1$ car $x_1 = 1$).

Soit l la limite de la suite (x_n). En faisant tendre n vers l'infini dans la relation précédente il vient (d'après 3/) : $l = 1 - l$ soit $\boxed{l = \lim x_n = \frac{1}{2}}$.

5. D'après 4/ on a $x_n - x_n^{n+1} = 1 - x_n$ soit $x_n^{n+1} = 2x_n - 1$ pour $n \geq 1$. Comme $x_n = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_n)$ il vient $\frac{1}{2^{n+1}}(1 + \varepsilon_n)^{n+1} = \varepsilon_n$ ou $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + \varepsilon_n)^{n+1} = 2^{n+1}\varepsilon_n}$.

En prenant le ln des deux membres : $(n+1)\ln(1 + \varepsilon_n) = (n+1)\ln 2 + \ln \varepsilon_n$ soit, en multipliant par ε_n, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)\varepsilon_n \ln(1 + \varepsilon_n) = (n+1)\varepsilon_n \ln 2 + \varepsilon_n \ln \varepsilon_n}$.

6. D'après la relation précédente on a $(n+1)\varepsilon_n [\ln 2 - \ln(1 + \varepsilon_n)] = -\varepsilon_n \ln \varepsilon_n$. Comme $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ on a $\varepsilon_n \ln \varepsilon_n \longrightarrow 0$. De plus $\ln 2 - \ln(1 + \varepsilon_n) \longrightarrow \ln 2$ donc $\boxed{(n+1)\varepsilon_n \longrightarrow 0}$.

On écrit $(1 + \varepsilon_n)^{n+1} = e^{(n+1)\ln(1+\varepsilon_n)}$. On a $(n+1)\ln(1 + \varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)\varepsilon_n$ (car $\ln(1 + \varepsilon_n) \underset{0}{\sim} \varepsilon_n$ puisque ε_n tend vers 0) donc $(n+1)\ln(1 + \varepsilon_n) \longrightarrow 0$. Il s'ensuit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \varepsilon_n)^{n+1} = 1}$.

7. D'après 7/ $(1 + \varepsilon_n)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et $(1 + \varepsilon_n)^{n+1} = 2^{n+1}\varepsilon_n$ (5/) donc $\boxed{\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n+1}}}$.

Il existe donc une suite ε_n' tendant vers 0 telle que $\varepsilon_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \varepsilon_n'\right)$ pour n assez grand, soit $x_n = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_n) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \varepsilon_n'\right)\right)$ ou $\boxed{x_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} + o\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)}$.

8. a. La fonction f est continue, dérivable sur $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$ sur cet intervalle, donc f est strictement décroissante sur I et donc $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[f(1), f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

b. Par une récurrence évidente on a, d'après 8/ a/ : $\forall p \in \mathbb{N}, u_p \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

α étant solution de l'équation $\varphi_2(x) = 0$ on a $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ soit $\alpha = \frac{1}{1+\alpha} = f(\alpha)$.

On écrit alors, pour tout entier natuel p, $|u_{p+1} - \alpha| = |f(u_p) - f(\alpha)| = \left|\frac{1}{1+u_p} - \frac{1}{1+\alpha}\right|$, soit $|u_{p+1} - \alpha| = \frac{|\alpha - u_p|}{(1+u_p)(1+\alpha)}$. Or $u_p \geq \frac{1}{2}$ (8/ a/) donc $1 + u_p \geq \frac{3}{2}$ et $1 + \alpha \geq 1$ donc $(1 + u_p)(1 + \alpha) \geq \frac{3}{2}$ soit $\frac{1}{(1+u_p)(1+\alpha)} \leq \frac{2}{3}$. On a donc : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, |u_{p+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_p - \alpha|}$.

c. Par une récurrence facile (ou un procédé "en cascades") on déduit de l'inégalité précédente que, pour tout entier naturel p, $0 \leq |u_p - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^p |u_0 - \alpha|$ soit $0 \leq |u_p - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^p |1 - \alpha|$.

Comme $\left(\frac{2}{3}\right)^p$ converge vers 0 (car $\frac{2}{3} \in [0,1[$) on a $\lim\limits_{p \to +\infty} |u_p - \alpha| = 0$ soit $\boxed{\lim\limits_{p \to +\infty} u_p = \alpha}$.

$\boxed{6}$ **Partie 1.**

1. Pour t réel et k entier tels que $0 < k \leq t \leq k+1$ on a $0 < \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$; en intégrant entre k et $k+1$ il vient $\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}$, soit $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$ et en particulier : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}}$.

2. En sommant les inégalités précédentes pour $k = 1$ à $n-1$ on obtient $y_n - 1 \leq \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{f} = \ln n$ donc on a $\boxed{y_n \leq \ln(n) + 1 \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*}$.

Partie 2.

3. D'après le graphique il semble que la suite (x_n) soit croissante et tende vers $+\infty$.

4. Par une récurrence aisée on a $x_n > 0$ pour tout entier naturel n d'où $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_n} > 0$. La suite (x_n) est donc strictement croissante. Elle a donc une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Si $l \in \mathbb{R}$ on aurait, en passant l'égalité $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ à la limite : $l = l + \frac{1}{l}$, soit $\frac{1}{l} = 0$ ce qui est impossible. On a donc $\boxed{\lim x_n = +\infty}$.

5. Pour tout entier naturel k on a $x_{k+1}^2 - x_k^2 = \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^2 - x_k^2 = 2 + \frac{1}{x_k^2}$.

En sommant ces égalités de $k = 0$ à $n-1$ il vient, après simplifications : $x_n^2 - x_0^2 = 2n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$.

Comme $x_0 = 1$ on a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n^2 = 2n + 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}}$.

6. D'après l'égalité précédente on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n^2 \geq 2n$, donc $x_n \geq \sqrt{2n}$. Comme la suite $\left(\sqrt{2n}\right)$ tend vers $+\infty$ on a, d'après le théorème de comparaison $\lim x_n = +\infty$.

7. Comme $x_k^2 \geq 2k$ pour $k \geq 1$, on a $\frac{1}{x_k^2} \leq \frac{1}{2k}$ et en sommant ces inégalités de $k = 1$ à $n-1$ on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}(\ln(n-1) + 1)$ (d'après 2/) soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \leq \frac{1}{2}\ln(n-1) + \frac{1}{2}$.

En ajoutant 1 aux deux membres : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \leq \frac{1}{2}\ln(n-1) + \frac{3}{2}$.

Il résulte alors de la question 5/ que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n^2 \leq 2n + \dfrac{5}{2} + \dfrac{\ln(n-1)}{2}}$.

8. D'après 5/ on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n^2 \geq 2n + 1$ et d'après la question précédente on déduite l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2n + 1 \leq x_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

En divisant par $2n$ (> 0) et en prenant la racine carrée il vient : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} \leq \frac{x_n}{\sqrt{2n}} \leq \sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n-1)}{4n}}$. Comme $\frac{\ln(n-1)}{4n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ on obtient, d'après le théorème de l'étau : $\frac{x_n}{\sqrt{2n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ c'est à dire que $\boxed{(x_n) \sim \sqrt{2n}}$.

Partie 3.

9. Soit la propriété $P_n : u_n \geq 1$. P_0 est vraie car $u_0 = 3/2$.

Si P_n est vraie pour un entier n fixé, on a $u_{n+1}-1=u_n+\frac{1}{u_n}-2=\frac{u_n^2-2u_n+1}{u_n}=\frac{(u_n-1)^2}{u_n}\geq 1$ (car $u_n>0$), donc $u_{n+1}\geq 1$ et P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.

D'autre part on a : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-u_n=\frac{1}{u_n}-1=\frac{1-u_n}{u_n}\leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

De plus elle est minorée par 1 donc elle est convergente et sa limite l est supérieur ou égale à 1. En passant à la limite dans $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n}-1$ on obtient : $l=l+\frac{1}{l}-1$ soit $\boxed{l=\lim u_n=1}$.

10. D'après 9/ on a, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-1=\frac{(u_n-1)^2}{u_n}\leq (u_n-1)^2$, car $u_n\geq 1$.

Soit la propriété P_n : $u_n\geq |u_n-1|\leq \dfrac{1}{2^{2^n}}$. P_0 est vraie car $|u_0-1|=\frac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2^{2^0}}=\frac{1}{2}$.

Si P_n est vraie pour un entier n fixé, on a $|u_{n+1}-1|\leq (u_n-1)^2$ et d'après l'hypothèse de récurrence on a $(u_n-1)^2\leq \left(\dfrac{1}{2^{2^n}}\right)^2=\frac{1}{\left(2^{2^n}\right)^2}=\frac{1}{2^{2^n\times 2}}=\frac{1}{2^{2^{n+1}}}$ donc $|u_{n+1}-1|\leq \frac{1}{2^{2^{n+1}}}$ et la propriété est vraie au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.

Pour avoir $|u_n-1|<10^{-6}$ *il suffit* donc d'avoir $\dfrac{1}{2^{2^n}}<10^{-6}$ soit $2^{2^n}>10^6$. A la calculatrice on trouve $n=5$. Il semble donc que la suite (u_n) converge rapidement vers 1.

11. D'après 10/ on a, pour tout entier naturel n, $\frac{|u_n-1|}{a^n}\leq \dfrac{1}{a^n 2^{2^n}}$. On a $a^n 2^{2^n}=e^{n\ln a+2^n\ln 2}$ et $n\ln a+2^n\ln 2=2^n\left(\ln 2+\frac{n\ln a}{2^n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ car $\frac{n}{2^n}\longrightarrow 0$ donc $a^n 2^{2^n}\longrightarrow+\infty$ et $\frac{|u_n-1|}{a^n}\longrightarrow 0$

On a donc $\boxed{|u_n-1|=o\left(a^n\right)}$ quand n tend vers $+\infty$.

$\boxed{7}$ **1.** Par une récurrence immédiate on voit que $x_n\geq 0$ pour tout entier naturel n.

Pour $n\in\mathbb{N}$ on a : $x_{n+1}-1=1=\dfrac{x_n^2-2x_n+1}{2\left(x_n+1\right)}=\dfrac{\left(x_n-1\right)^2}{2\left(x_n+1\right)}\geq 0$. On a donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, x_n\geq 1}.$$

Remarque : il est inutile de raisonner par récurrence.

2. Etudions le sens de variation de (x_n). Pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x_n &= \frac{x_n^2+3}{2\left(x_n+1\right)}-x_n \\ &= \frac{-x_n^2-2x_n+3}{2\left(x_n+1\right)}. \end{aligned}$$

Les racines du trinôme $-x^2-2x+3$ sont -3 et 1 donc ce trinôme est négatif pour $x\geq 1$. Comme $x_n\geq 1$ pour $n\geq 1$ on a donc $-x_n^2-2x_n+3\leq 0$ soit $x_{n+1}-x_n\leq 0$ pour $n\geq 1$.

La suite (x_n) est donc décroissante à partir de $n=1$.

Comme elle est minorée par 1 elle est donc convergente.

Soit l sa limite. En passant à la limite dans la relation $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+3}{2\left(x_n+1\right)}$ on obtient $l=\frac{l^2+3}{2(l+1)}$ (la suite (x_{n+1}) tend vers l car c'est une suite extraite de (x_n)). On obtient $2l^2+2l=l^2+3$ soit $l^2+2l-3=0$. On a donc $l=-3$ ou $l=1$. De plus $x_n\geq 0$ pour tout n et par passage à la limite on a $l\geq 0$. Finalement on a $\boxed{l=1}$.

3. La calcul du 1/ donne, pour $n\geq 1$, $|x_{n+1}-1|=\left|\dfrac{\left(x_n-1\right)^2}{2\left(x_n+1\right)}\right|=\dfrac{x_n-1}{2\left(x_n+1\right)}.|x_n-1|$ (car $x_n\geq 1$). De plus $0\leq x_n-1\leq x_n$ et $2\left(x_n+1\right)\geq 2x_n$ donc $0<\frac{1}{2(x_n+1)}\leq\frac{1}{2x_n}$.

En multipliant membres à membres on obtient : $0 \leq \dfrac{x_n - 1}{2\left(x_n + 1\right)} \leq \frac{1}{2}$.

On a donc : $|x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|x_n - 1|$ pour $n \geq 1$ (cet encadrement est vrai aussi si $n = 0$).

Par une récurrence facile (ou un raisonnement "en cascade") on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow 0$ (suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$) on a, d'après le théorème de l'étau, $|x_n - 1| \longrightarrow 0$, soit $\boxed{x_n \longrightarrow 0}$.

8 **1.** La fonction f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et pour tout réel x, $f_n'(x) = nx^{n-1} - n = n\left(x^{n-1} - 1\right) < 0$ pour $x \in [0;1[$. D'après le théorème de la bijection f_n induit une bijection de $[0;1]$ sur $[f_n(1); f_n(0)] = [2-n;1]$. Comme $0 \in [2-n;1]$ l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution x_n sur l'intervalle $[0;1]$.

Pour tout $n \geq 2$ on a $0 < x_n \leq 1$.

2. Pour tout $x \in [0;1]$ et $n \geq 2$ on a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n - x = x^n(x-1) - x$. Comme $0 \leq x \leq 1$, on a $x - 1 \leq 0$ donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$ pour $x \in [0;1]$ et $n \geq 2$.

En remplaçant x par x_n il vient : $f_{n+1}(x_n) \leq f_n(x_n)$, soit $f_{n+1}(x_n) \leq 0$ (car $f_n(x_n) = 0$) ou encore $f_{n+1}(x_n) \leq f_{n+1}(x_{n+1})$. La fonction f_{n+1} étant strictement décroissante sur $[0;1]$ il s'ensuit que $x_n \geq x_{n+1}$ pour $n \geq 2$ donc que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante. Comme elle est minorée par 0 elle est donc convergente.

3. Pour $n \geq 2$ la relation $f_n(x_n) = 0$ s'écrit $x_n^n - nx_n + 1 = 0$ soit $x_n = \frac{x_n^n+1}{n}$. Comme $x_n \leq 1$ on a $x_n^n \leq 1$ donc $\frac{x_n^n+1}{n} \leq \frac{2}{n}$. On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, 0 < x_n \leq \frac{2}{n}}$.

4. D'après l'encadrement précédent et le théorème de l'étau on a : $\lim x_n = 0$.

D'après 3/ on a $nx_n = 1 + x_n^n$ pour $n \geq 2$. Or $x_n^n = e^{n \ln x_n}$ et $n \ln x_n \longrightarrow -\infty$ (car $x_n \longrightarrow 0$) donc $x_n^n \longrightarrow 0$. On a donc $nx_n \longrightarrow 1$ soit $\frac{x_n}{1/n} \longrightarrow 1$ ou encore $\boxed{x_n \sim \frac{1}{n}}$.

5. a. Pour $n \geq 2$ on a $ny_n = nx_n - 1 = x_n^n \longrightarrow 0$ d'après 4/ et $ny_n = nx_n^n = e^{\ln n + n \ln x_n}$. Or $\ln n + n \ln x_n = n\left(\frac{\ln n}{n} + \ln x_n\right) \longrightarrow -\infty$ (car $\frac{\ln n}{n} \longrightarrow 0$ et $\ln x_n \longrightarrow -\infty$) donc $\boxed{ny_n \longrightarrow 0}$.
De même, pour $n \geq 2$, $n^2 y_n = e^{2\ln n + n \ln x_n}$ et $2\ln n + n \ln x_n = n\left(\frac{2\ln n}{n} + \ln x_n\right) \longrightarrow -\infty$ donc $\boxed{n^2 y_n \longrightarrow 0}$.

b. Pour $n \geq 2$, on a $y_n = \frac{1}{n}x_n^n = \frac{1}{n}e^{n \ln x_n} = \frac{1}{n}e^{n\ln\left(y_n + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n}e^{n\ln(ny_n+1) - n\ln n} = \frac{1}{n^{n+1}}e^{n\ln(1+ny_n)}$.

Quand n tend vers $+\infty$ on a $\ln(1 + ny_n) \sim ny_n$ (car $ny_n \longrightarrow 0$) donc $n\ln(1+ny_n) \sim n^2 y_n$. Comme $n^2 y_n \longrightarrow 0$ on a $n\ln(1+ny_n) \longrightarrow 0$ donc $e^{n\ln(1+ny_n)} \longrightarrow 1$ soit $y_n \sim \frac{1}{n^{n+1}}$.

C'est équivalent à l'existence d'une suite (ε_n) convergeant vers 0 telle que $y_n = \frac{1}{n^{n+1}}(1+\varepsilon_n)$, soit $x_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{n+1}}(1+\varepsilon_n)$, ou encore $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{n+1}}$. On a donc $\boxed{x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right)}$.

9 **1.** Pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{\left(u_n + v_n\right)^2 - 4u_n v_n}{2\left(u_n + v_n\right)} = \frac{\left(u_n - v_n\right)^2}{2\left(u_n + v_n\right)}.$$

Montrons par récurrence la propriété P_n : "$u_n > v_n > 0$".

La propriété est vraie au rang $n = 0$.

Si P_n est vraie pour un entier n fixé, alors $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} > 0$ et $v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n+v_n} > 0$. Le calcul précédent donne alors $u_{n+1} - v_{n+1} > 0$ donc P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > v_n > 0}.$$

2. Pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} < 0$ d'après 1/ donc la suite (u_n) est décroissante. De même on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2u_nv_n}{u_n + v_n} - v_n = \dfrac{2u_nv_n - v_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \dfrac{u_nv_n - v_n^2}{u_n + v_n}$, soit $v_{n+1} - v_n = \dfrac{v_n(u_n - v_n)}{u_n + v_n} > 0$ d'après 1/ donc la suite (v_n) est croissante.

D'après 1/ on a donc, (u_n) étant décroissante te (v_n) croissante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < v_0 < v_n < u_n < u_0$. La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0 ou v_0) donc elle converge. De même la suite (v_n) est croissante et majorée (par u_0) donc elle converge.

Posons $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $l' = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$. En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ il vient (vu que (u_{n+1}) tend vers l) : $l = \frac{l+l'}{2}$ ce qui équivaut à $2l = l + l'$ soit $l = l'$.

Remarque : les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.

3. On remarque que pour tout entier naturel n : $u_{n+1}v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} . \dfrac{2u_nv_n}{u_n + v_n} = u_nv_n$. La suite (u_nv_n) est donc constante et on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_nv_n = u_0v_0 = ab$.

En passant à la limite on obtient : $l^2 = ab$ et comme $l \geq 0$ (car $\forall n, u_n \geq 0$) on a $\boxed{l = \sqrt{ab}}$.

4. Pour tout entier naturel n on a $u_n + v_n > v_n > v_0 = 1$ donc $0 < \dfrac{1}{u_n + v_n} \leq 1$.

On a donc $\frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \leq \frac{(u_n - v_n)^2}{2}$ soit, d'après le calcul du 1/ : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2}}$.

On montre par récurrence la propriété P_n : " $|u_n - v_n| \leq \dfrac{1}{2^{2^n - 1}}$.".

La propriété est vraie au rang $n = 0$ car $|u_0 - v_0| = 1$ et $\dfrac{1}{2^{2^0 - 1}} = \dfrac{1}{2^0} = 1$.

Si P_n est vraie pour un entier n fixé, alors $|u_n - v_n| \leq \dfrac{1}{2^{2^n - 1}}$ et en élevant au carré les deux membres il vient : $(u_n - v_n)^2 \leq \left(\dfrac{1}{2^{2^n - 1}}\right)^2 = \dfrac{1}{2^{2(2^n - 1)}} = \dfrac{1}{2^{2^{n+1} - 2}}$.

On a alors : $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2} \leq \dfrac{1}{2} . \dfrac{1}{2^{2^{n+1} - 2}} = \dfrac{1}{2^{2^{n+1} - 1}}$, donc la propriété P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.

Du fait de l'encadrement $v_n \leq l \leq u_n$ on a $|u_n - l| \leq |u_n - v_n|$ et $|v_n - l| \leq |u_n - v_n|$, donc pour tout entier naturel n on a $|u_n - l| \leq \dfrac{1}{2^{2^n - 1}}$ ainsi que $|v_n - l| \leq \dfrac{1}{2^{2^n - 1}}$.

Pour avoir $|u_n - l| \leq 10^{-10}$ (ou $|u_n - l| \leq 10^{-10}$) *il suffit* donc d'avoir $\dfrac{1}{2^{2^n - 1}} < 10^{-10}$.

La calculatrice donne : $n \geq 6$.

Les réels u_6 et v_6 sont donc des valeurs approchées par excès et par défaut respectivement de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près.

$\boxed{\textbf{10}}$ *Question préliminaire* : on peut raisonner par récurrence ou remarquer que la suite $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k}$ est la somme des termes consécutifs de la suite géométrique $\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ de raison $\frac{1}{2}$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} . \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

1. Raisonnons par récurrence. Soit la propriété

$$P_n : \text{"}\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ éléments de } [0,1], \prod_{i=1}^{n}(1-x_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\text{"}.$$

Initialisation : P_1 s'écrit $\forall x_1 \in [0,1], 1 - x_1 \geq 1 - x_1$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : supposons la propriété P_n pour un entier naturel n fixé et montrons que P_{n+1} est vraie.

Soient des réels $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ de l'intervalle $[0,1]$. D'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité par le rées (positif) $1 - x_{n+1}$ il vient :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n}(1-x_i)(1-x_{n+1}) &\geq \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)(1-x_{n+1}), \text{ soit :} \\ \prod_{i=1}^{n+1}(1-x_i) &\geq 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i - x_{n+1} + x_{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i + x_{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i. \end{aligned}$$

Comme les x_i sont positifs on a $x_{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \geq 0$ donc $\prod\limits_{i=1}^{n+1}(1-x_i) \geq 1 - \sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i$ donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : la propriété P_n étant vraie pour $n = 1$ et étant héréditaire elle est vraie pour tout entier naturel non nul n.

2. Pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} < 1.$$

Comme la suite (S_n) est à termes strictements positifs on en déduit que (S_n) est décroissante.

De plus cette suite est minorée par 0 donc elle est convergente.

3. Pour tout entier naturel non nul n on a $1 - \dfrac{1}{2^k} \in [0,1]$ donc on peut appliquer l'inégalité de la question 1/ (avec $x_i = 1 - \frac{1}{2^i}$) et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}.$$

Or $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2^i} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$ (question préliminaire) donc $1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2^i} = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2^n}$ d'où:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \geq \frac{1}{2^n}.$$

4. Considérons la fonction f définie par $f(x) = \ln(1-x) + x$ pour $x \in [0,1[$. f est dérivable sur cet intervalle (somme et composée de fonctions dérivables) et : $\forall x \in [0,1[, f'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 = \frac{-x}{1-x} \leq 0$ sur l'intervalle $[0,1[$ donc f est décroissante sur cet intervalle. De plus $f(0) = 0$ donc $f(x) \leq 0$ sur I soit : $\boxed{\forall x \in [0,1[, \ln(1-x) \leq -x}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\ln S_n = \ln \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)$.

D'après 4/ on a, pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$: $\ln \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right) \leq -\dfrac{1}{2^k}$. En sommant ces inégalités pour $k = 1, \ldots, n$ il vient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \leq -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = -1 + \frac{1}{2^n}$ (d'après la question préliminaire). Comme $n \geq 1$ on a $2^n \geq 2$ donc $\dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{2}$ et donc $\ln S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right) \leq -1 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

En prenant l'image des deux membres par la fonction exponentielle (croissante sur $\mathbb{R}$) on obtient :

$$\boxed{S_n \leq e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}}.$$

Autre façon : la suite (S_n) étant décroissante on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq S_1$. Or $S_1 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2} < e^{-1/2}$ (car c'est équivalent à $\frac{1}{4} < e^{-1}$ ou $4 > e$ qui est vraie) d'où $S_n \leq e^{-1/2}$.

On a donc l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{2^n} \leq S_n \leq e^{-1/2}$. En "passant l'encadrement à la limite" on obtient : $\boxed{0 \leq \lim S_n \leq e^{-1/2}}$.

$\boxed{11}$ **1.** Soit la fonction φ_k définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \arctan x - x + k\pi$. φ_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi_k'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0$ sur $\mathbb{R}^*$, donc φ_k est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$. De plus $\varphi_k(k\pi) = \arctan(k\pi) > 0$ et $\varphi_k\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \arctan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - \frac{\pi}{2} < 0$ (car pour tout réel x, $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$). D'après le théorème de la bijection, l'équation $\varphi_k(x) = 0$ a une unique solution x_k sur l'intervalle $\left]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\arctan x_k = x_k - k\pi$. Comme $x_k \longrightarrow +\infty$, on a $\arctan x_k \longrightarrow \frac{\pi}{2}$, donc $\lim\limits_{k \to +\infty} (x_k - k\pi) = \frac{\pi}{2}$.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $k\pi < x_k < \frac{\pi}{2} + k\pi$, donc $\arctan(k\pi) < \arctan(x_k) < \arctan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ (la fonction arctan étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$). Comme $\arctan x_k = x_k - k\pi$ on obtient $\arctan(k\pi) < x_k - k\pi < \arctan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, donc $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) < \frac{\pi}{2} - (x_k - k\pi) < \frac{\pi}{2} - \arctan(k\pi)$, et compte tenu de la relation $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ il vient : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \arctan\left(\frac{1}{(k+1/2)\pi}\right) \leq \tau_k \leq \arctan\left(\frac{1}{k\pi}\right)}$.

4. En divisant les 3 membres de l'encadrement précédent par $\arctan(1/k\pi)$ on obtient $\frac{\arctan(1/(k+1/2)\pi)}{\arctan(1/k\pi)} \leq \frac{\tau_k}{\arctan(1/k\pi)} \leq 1$. Quand k tend vers l'infini le membre de gauche est équivalent à $\frac{1/(k+1/2)\pi}{1/k\pi}$ (car $\arctan x \sim x$ en 0), soit à $\frac{k}{k+1/2}$, donc il tend vers 1. D'après le théorème de l'étau on a donc $\lim \frac{\tau_k}{\arctan(1/k\pi)} = 1$, soit $\tau_k \sim \arctan(1/k\pi)$. Or $\arctan(1/k\pi) \sim 1/k\pi$, donc $\boxed{\tau_k \sim 1/k\pi}$.

Il existe donc une suite (ε_k) convergeant vers 0 telle que $\tau_k = 1/k\pi\,(1 + \varepsilon_k)$, soit $\tau_k = \frac{1}{k\pi} + o\left(\frac{1}{k}\right)$, ou encore : $\frac{\pi}{2} - (x_k - k\pi) = \frac{1}{k\pi} + o\left(\frac{1}{k}\right)$, soit $\boxed{x_k = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k\pi} + o\left(\frac{1}{k}\right)}$.

5. Pour tout réel $x > 0$ on a $f'(x) = \frac{1}{1+(x+k\pi)^2} < \frac{1}{1+k^2\pi^2}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 < f'(x) \leq \delta_k$, avec $\delta_k = \frac{1}{1+k^2\pi^2} \in [0, 1[$.

6. On montre d'abord par récurrence sur n la propriété $P(n)$: "$u_n \leq \theta_k$".

C'est vrai pour $n = 0$ (car $u_0 = 0$ et $\theta_k \geq 0$).

Si $P(n)$ est vraie pour un entier n donné on a $u_n \leq \theta_k$ donc $f(u_n) \leq f(\theta_k)$ car f_k est croissante sur $\mathbb{R}$, donc $u_{n+1} \leq \theta_k$ et la propriété $P(n+1)$ est vraie donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

D'autre part écrivons : $\theta_k - u_{n+1} = f(\theta_k) - f(u_n)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème des accroissements finis appliqué à f sur l'intervalle $[u_n, \theta_k]$, il existe $c_k \in]u_n, \theta_k[$ tel que $f(\theta_k) - f(u_n) = f'(c_k)(\theta_k - u_n)$.

Comme $f'(c_k) \leq \delta_k$ on en déduit que $f(\theta_k) - f(u_n) \leq \delta_k(\theta_k - u_n)$.

En définitive on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \theta_k - u_{n+1} \leq \delta_k(\theta_k - u_n)}$.

Classiquement (par récurrence ou par une "cascade") on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \theta_k - u_n \leq \delta_k^n(\theta_k - u_0).$$

Comme $\delta_k \in [0,1[$ on a $\delta_k^n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, d'après le théorème de l'étau, on a $\theta_k - u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$, soit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \theta_k}$.

$\boxed{12}$ **1. (i)** Soit la propriété $P(n)$: " $(1-\alpha)^n \geq 1 - n\alpha$".

Initialisation : $P(1)$: " $1-\alpha \geq 1-\alpha$" qui est vraie.

Hérédité : supposons la propriété $P(n)$ vraie pour un entier n donné : $(1-\alpha)^n \geq 1 - n\alpha$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a : $(1-\alpha)^{n+1} = (1-\alpha)^n(1-\alpha)$.

D'après l'hypothèse de récurrence on a $(1-\alpha)^n \geq 1-n\alpha$ donc $(1-\alpha)^n(1-\alpha) \geq (1-n\alpha)(1-\alpha)$ (car $1-\alpha > 0$) soit : $(1-\alpha)^{n+1} \geq 1-n\alpha-\alpha+n\alpha^2 \geq 1-(n+1)\alpha$ (car $n\alpha^2 \geq 0$). La propriété $P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on étudie les variations de la fonction f définie par $f(x) = (1-x)^n - 1 + nx$ sur $]0,1[$.

On a $f'(x) = -n(1-x)^{n-1} + n = n\left[1-(1-x)^{n-1}\right]$ pour $x \in]0,1[$.

Comme $x \in]0,1[$ on a $0 < 1-x < 1$ donc $(1-x)^{n-1} \leq 1$ soit $f'(x) \geq 0$ sur $]0,1[$.

La fonction f est donc croissante sur $]0,1[$ et comme $f(0) = 0$ on a $f(x) \leq 0$ sur $]0,1[$, ce qui démontre l'inégalité.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$, soit :

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+\frac{n}{n+1}}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^n.$$

On écrit : $n^2+2n = (n+1)^2 - 1$ d'où $\boxed{\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n}$.

3. D'après la question 1/ on a : $\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2}$, donc, d'après 2/

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right).$$

Or $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) = 1 - \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^3} = 1 - \frac{n(n+1)-(n+1)^2+n}{(n+1)^3} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1.$

Finalement on a $\forall n\in\mathbb{N}^*, \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\geq 1$, soit $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$ donc la suit (u_n) est croissante (car elle est à termes strictement positifs).

4. D'après 1/ on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n\geq 1-\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$, donc $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n}\leq 2$.

Il s'ensuit que $\forall n\in\mathbb{N}^*, \frac{\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n}\leq 2\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)^n\leq 2$.

Comme $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\frac{\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n}$ on a donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\leq 2}$.

En élevant les deux membres (positifs) au carré il vient : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\leq 4$, soit $u_{2n}\leq 4$.

Pour tout entier naturel non nul n on a $u_n\leq u_{2n}$ (car (u_n) est croissante) donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n\leq 4$.

La suite (u_n) est donc majorée; comme elle est croissante la suite (u_n) est convergente.

$\boxed{13}$ **1.** Pour tout réel positif ou nul on a $|f(x)-x|=\left|\frac{x-x\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\right|=\frac{x^3}{1+x^2}$. Comme $1+x^2\geq 1$ on a $\frac{x^3}{1+x^2}\leq x^3$.

On a donc : $\forall x\geq 0, |f(x)-x|\leq x^3$. Ce qui s'écrit aussi $\boxed{\forall x\geq 0, x-x^3\leq f(x)\leq x+x^3}$.

2. Pour $1\leq k\leq n$ on a $1\leq k^3\leq n^3$ et en sommant de $k=1$ à n on obtient $n\leq\sum\limits_{k=1}^{n}k^3\leq n^4$, d'où $0\leq\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^3}{n^6}\leq\frac{1}{n^2}$. D'après le théorème de l'étau on a $\boxed{\lim\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^3}{n^6}\to 0}$.

3. D'après 1. on a pour $1\leq k\leq n$, $\frac{k}{n^2}-\left(\frac{k}{n^2}\right)^3\leq f\left(\frac{k}{n^2}\right)\leq\frac{k}{n^2}+\left(\frac{k}{n^2}\right)^3$. En sommant ces inégalités de $k=1$ à n il vient :

$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}-\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3\leq u_n\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3$. Comme $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ cet encadrement s'écrit : $\frac{n+1}{2n}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^3}{n^6}\leq u_n\leq\frac{n+1}{2n}+\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^3}{n^6}$. D'après 2. et le théorème de l'étau on a : $\boxed{\lim u_n=\frac{1}{2}}$.

4. D'après l'encadrement précédent on a pour tout entier naturel non nul n, $\frac{1}{2n}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^3}{n^6}\leq u_n-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2n}+\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^3}{n^6}$ et en divisant par $\frac{1}{2n}$ il vient : $1-2\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^3}{n^5}\leq 2n\left(u_n-\frac{1}{2}\right)\leq 1+2\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^3}{n^5}$.

Or $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^3}{n^5}=\frac{n^2(n+1)^2}{4n^5}\to 0$ (rapport des termes de plus hauts degrés) donc, d'après le théorème de l'étau, $2n\left(u_n-\frac{1}{2}\right)\to 1$ soit : $\boxed{u_n-\frac{1}{2}\sim\frac{1}{2n}}$.

$\boxed{14}$ **1.** En multipliant le numérateur et le déonominateur de u_n par $2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)$ on obtient : $u_n=\frac{(2n)!}{[2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)]^2}$. Or $2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)=2^n n!$, d'où $\boxed{u_n=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}}$.

2. Pour tout $n\geq 1$ on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}\times\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}=\frac{2n+1}{2(n+1)}$. Comme $2n+1<2n+2$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$. La suite (u_n) étant à termes strictement positifs elle est strictement décroissante.

Comme elle est minorée par 0 elle est convergente.

3. Pour tout $n \geq 1$ on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 \frac{n+2}{n+1} = \frac{(2n+1)^2}{4(n+1)^2} \cdot \frac{n+2}{n+1}$. Or $(2n+1)^2(n+2) - 4(n+1)^2(n+1) = -3n - 2 < 0$ donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$. (v_n) est donc décroissante, et comme elle est minorée par 0 elle est convergente.

4. a. On a : $\prod\limits_{k=2}^{2n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod\limits_{k=2}^{2n}\frac{k-1}{k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2n}$, après simplifications.

b. On a $u_n^2 = \frac{1}{4}\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{4}\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)\left(1-\frac{1}{2k}\right)$. Or $\frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2k-1}$, donc $1-\frac{1}{2k} \geq 1-\frac{1}{2k-1}$, donc $u_n^2 \geq \frac{1}{4}\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)\left(1-\frac{1}{2k-1}\right) = \frac{1}{2}\prod\limits_{k=2}^{2n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

D'après la question précédente on a donc : $u_n^2 \geq \frac{1}{4n}$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on donc : $(n+1)\,u_n^2 \geq \frac{n+1}{4n}$, soit $v_n \geq \frac{n+1}{4n}$.

En passant à la limite quand n tend vers l'infini on déduit : $\lim v_n \geq \frac{1}{4}$, donc $C = \lim v_n > 0$.

5. D'après 4/ on a : $\lim(n+1)\,u_n^2 = C$, donc $\lim\sqrt{n+1}u_n = \sqrt{C} \neq 0$, ce qui équivaut à $\sqrt{n+1}u_n \sim \sqrt{C}$, soit $\boxed{u_n \sim \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{n}}}$.

15 **1.** $\sqrt{\frac{1+x}{2}} \geq x \iff \frac{1+x}{2} \geq x^2 \iff 2x^2 - x - 1 \leq 0$. Le trinôme $2x^2 - x - 1$ a 1 pour racine évidente, l'autre valant $-\frac{1}{2}$ (produit des racines $= \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$), donc $2x^2 - x - 1 \leq 0$ pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ et en particulier sur $[0,1]$. On a donc $\sqrt{\frac{1+x}{2}} \geq x$ pour tout x de $[0,1]$.

Montrons par récurrence la propriété $P(n)$ "$0 \leq x_n \leq 1$".

$P(0)$ est vraie car $x_0 \in [0,1]$.

Supposons $P(n)$ vraie pour un entier n donné. On a donc $0 \leq x_n \leq 1$, donc $0 \leq \frac{1+x_n}{2} \leq 1$, donc (la fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}_+$), $0 \leq \sqrt{\frac{1+x_n}{2}} \leq 1$, donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : d'apréd le principe de récurrence on a, pour tout entier naturel n, $0 \leq x_n \leq 1$.

En remplaçant x par x_n dans l'inégalité $\sqrt{\frac{1+x}{2}} \geq x$ on obtient $x_{n+1} \geq x_n$ donc la suite (x_n) est croissante. Comme elle est majorée par 1elle est convergente.

Soit l sa limite. En passant à la limite $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$ on obtient, la suite (x_{n+1}) convergeant vers l et la fonction f étant continue en 1, $l = f(l)$. Comme précédemment on obtient $2x^2 - x - 1 = 0$, soit $l = 1$ ou $l = -\frac{1}{2}$. La suite étant à termes positifs, on a $l \geq 1$, donc $\boxed{l = \lim x_n = 1}$.

2. Pour tout entier naturel n on a : $|x_{n+1} - 1| = \left|\sqrt{\frac{1+x_n}{2}} - 1\right| = \frac{\left|\frac{1+x_n}{2} - 1\right|}{\left|\sqrt{\frac{1+x_n}{2}} + 1\right|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|x_n - 1|}{\left|\sqrt{\frac{1+x_n}{2}} + 1\right|}$.

Minorons le dénominateur : comme $x_n \geq 0$ on a $\sqrt{\frac{1+x_n}{2}} + 1 \geq 1$, donc, en prenant l'inverse : $\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x_n}{2}} + 1} \leq 1$, d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|x_n - 1|}$.

Par une récurrence facile on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - 1|$.

Comme $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, la suite $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge vers 0, donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - 1|$ aussi.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |x_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - 1|$, on a, d'après le théorème de l'étau, $|x_n - 1| \longrightarrow 0$ et on retrouve que $\lim x_n = 1$.

3. a. On a, pour tout réel x, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, et compte tenu de la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on obtient $\boxed{\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1}$.

b. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n on a $x_n = \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$.

Soit $P(n)$ la propriété "$x_n = \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$".

La propriété $P(0)$ est vraie : $x_0 = \cos(\alpha)$.

Supposons $P(n)$ vraie pour un entier n donné : $x_n = \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$.

On a donc : $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha/2^n)}{2}}$. La relation du 3/ a/ s'écrit $\frac{1+\cos(2x)}{2} = \cos^2(x)$ pour tout réel x, donc $\frac{1+\cos(\alpha/2^n)}{2} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$ (en prenant $x = \frac{\alpha}{2^{n+1}}$), et $x_{n+1} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)} = \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$ (car $\frac{\alpha}{2^{n+1}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \geq 0$). La propriété $P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : $\forall n \in, x_n = \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$.

Quand n tend vers l'infini, $\frac{\alpha}{2^n}$ converge vers 0, donc $\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \underset{n\to+}{\longrightarrow} \cos(0) = 1$, car *la fonction* cos *est continue en* 0. On retrouve que (x_n) converge vers 1.

$\boxed{\mathbf{16}}$ **1.** Pour tout entier naturel n on a : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}+1/2}{u_{n+1}+1} = \dfrac{\frac{2u_n-1}{2u_n+5}+\frac{1}{2}}{\frac{2u_n-1}{2u_n+5}+1} = \dfrac{6u_n+3}{8u_n+8}$, soit $v_{n+1} = \dfrac{3}{4}.\dfrac{u_n+1/2}{u_n+1} = \dfrac{3}{4}.v_n$.

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $3/4$.

Comme $v_0 = \dfrac{u_0+1/2}{u_0+1} = \dfrac{1}{2}$, on a $\boxed{v_n = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On a $v_n = \dfrac{u_n+1/2}{u_n+1} \iff u_n v_n + v_n = u_n + \dfrac{1}{2} \iff u_n(v_n-1) = -v_n + \dfrac{1}{2}$. Comme $v_n \neq 1$ pour tout n on a : $u_n = \dfrac{-v_n+1/2}{v_n-1} = \dfrac{-2v_n+1}{2v_n-2}$, soit $\boxed{u_n = \dfrac{-\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n-2}}$.

Comme (v_n) converge vers 0 (suite géométrique de raison $\frac{3}{4} \in]-1,1[$), il s'ensuit que $\boxed{\lim u_n = -\dfrac{1}{2}}$.

$\boxed{\mathbf{17}}$ **1.** Soit $P(n)$ la propriété "$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$".

Initialisation : $P(1)$ est la propriété $\frac{1}{1(1+1)} = 1 - \frac{1}{2}$ qui est vraie.

Hérédité : supposons la propriété $P(n)$ vraie pour un entier n donné et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$; en ajoutant $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ au deux membres on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \text{ soit :}\\ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

D'autre part on a : $1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{(n+2)-1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}$.

On a donc : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+2}$, donc la propriété $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : la propriété $P(n)$ est initialisée à $n=1$ et héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

2. Pour a et b réels et $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}$.

On aura $\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ si $a+b=0$ et $a=1$ ce qui donne $\boxed{a=1 \text{ et } b=-1}$.

Conclusion : $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}}$.

On écrit :

$$\begin{aligned}
k &= 1: \quad \frac{1}{1\,(1+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\\
k &= 2: \quad \frac{1}{2\,(2+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
k &= n: \quad \frac{1}{n\,(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

En ajoutant membres à membres et après simplifications on obtient :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Comme la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ tend vers 0 on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=1$.

$\boxed{18}$ Pour tout $n\geq 1$ on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}\times\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}=\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\times\frac{2^{2n}}{2^{2n}\times 2^2}\times\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^2$.

On a $(2n+2)!=(2n)!\times(2n+1)\times(2n+2)$ et $(n+1)!=n!\times(n+1)$, d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}=\frac{2n+1}{2(n+1)}$. Comme $2n+1<2n+2$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$. La suite (u_n) étant à termes strictement positifs elle est strictement décroissante.

Comme elle est minorée par 0 elle est convergente.

$\boxed{19}$ **Première méthode.**

1. a. Soit la propriété $P(n)$: "$u_n\leq 0$".

$P(0)$ est vraie. Si elle est vraie pour un entier naturel n donné on a : $u_n\leq 0\Longrightarrow -u_n\geq 0\Longrightarrow 3-u_n>0$, donc $\frac{1}{3-u_n}>0$ et multipliant les deux membres par $u_n\leq 0$ on obtient $\frac{2u_n}{3-u_n}\leq 0$, soit $u_{n+1}\leq 0$ et donc $P(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

b. Pour tout entier naturel n on a $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{3-u_n}-u_n=\frac{u_n(u_n-1)}{3-u_n}$. Le dénominateur est strictement positif et . $u_n(u_n-1)\geq 0$ (car $u_n\leq 0$) donc $u_{n+1}-u_n\geq 0$.

La suite (u_n) est donc croissante. Comme elle est majorée (par 0) elle est convergente.

Soit l sa limite. En passant à la limite dans $u_{n+1}=\frac{2u_n}{3-u_n}$ il vient : $l=\frac{2l}{3-l}$ ce qui équivaut à $l(l-1)=0$, soit $l=0$ ou $l=1$. La suite (u_n) étant à termes négatifs, on a $l\leq 0$ donc $\boxed{l=0}$.

Deuxième méthode.

2. a. Pour tout entier naturel n on a $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}=\frac{\frac{2u_n}{3-u_n}}{1-\frac{2u_n}{3-u_n}}=\frac{2u_n}{3(1-u_n)}$.

On a donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*, v_{n+1}=\frac{2}{3}\times v_n$. (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. Comme $\frac{2}{3}\in\,]-1,1[$ on a : $\lim v_n=0$.

D'autre part, pour tout entier naturel n on a : $v_n=\dfrac{u_n}{1-u_n}\Longleftrightarrow v_n-u_nv_n=u_n\Longleftrightarrow u_n(1+v_n)=v_n$, soit $u_n=\frac{v_n}{1+v_n}$ (on a $v_n\neq -1$ pour tout n).

Comme $(v_n)\,0$ on en déduit que $(u_n)\longrightarrow 0$.

Troisième méthode.

3. a. Pour tout entier naturel n : $|u_{n+1}|=\left|\frac{2u_n}{3-u_n}\right|=\left|\frac{2}{3-u_n}\right|\times|u_n|$.

Comme $u_n \leq 0$ on a $3 - u_n \geq 3$, donc $0 \leq \frac{1}{3-u_n} \leq \frac{1}{3}$ et $\left|\frac{2}{3-u_n}\right| \leq \frac{2}{3}$.

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},}$.

b. Par un raisonnement en cascade ou par récurrence on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times |u_0|$ (écrire les inégalités $|u_{k+1}| \leq \frac{2}{3} \times |u_k|$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$ et les multiplier memebres à membres).

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$. D'après le théorème de l'étau $|u_n| \longrightarrow 0$ (car $2\left(\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0$) donc $\boxed{(u_n) \longrightarrow 0}$.

20 **1.** Pour tout entienr naturel non nul n on a : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^3} > 0$ donc la suite (v_n) est (strictement) croissante. De même $w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - v_n + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$, soit $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2+n^2(n+1)-(n+1)^3}{n^2(n+1)^3} = \frac{-n^2-3n-1}{n^2(n+1)^3} < 0$ donc la suite (w_n) est (strictement) décroissante.

De plus on a : $n \in \mathbb{N}^*, w_n - v_n = \frac{1}{(n+1)^3}$ qui tend vers 0 donc les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes. Il en résulte que la suite (v_n) (et (w_n)) est convergente. Soit $l = \lim v_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a donc $u_n < l < w_n$ donc $|v_n - l| < |w_n - v_n| = \frac{1}{n^2}$. De même on a $|w_n - l| < \frac{1}{n^2}$.

2. D'après les inégalités précédentes, pour avoir $|v_n - l| < 10^{-5}$ et $|w_n - l| < 10^{-5}$*il suffit* d'avoir $\frac{1}{n^2} < 10^{-5}$ soit $n^2 > 10^5$ ou $\boxed{n \geq 317}$ (à la calculatrice).

21 **1.** Soit $P(n)$ la propriété "$n! \geq n^2$".

$P(4)$ est vraie car $4! = 24$ et $4^2 = 16$.

Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour un entier donné $n \geq 4$.

On a $n! \geq n^2$ donc $(n+1)\, n! \geq (n+1)\, n^2$ soit $(n+1)! \geq (n+1)\, n^2$.

Pour que $(n+1)! \geq (n+1)^2$ il suffit que $(n+1)\, n^2 \geq (n+1)^2$ ce qui équivaut à $n^2 \geq n+1$ ce qui est vrai (signe du trinôme $X^2 - X - 1$) donc on a bien $(n+1)! \geq (n+1)^2$ et $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : on a $n! \geq n^2$ pour $n \geq 4$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ est à termes positifs et $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{n^2}$ pour $n \geq 4$ terme général d'une série convergente (série de Riemann $\displaystyle\sum_{n} \frac{1}{n^\alpha}$avec $\alpha = 2 > 1$) donc elle est convergente.

2. Soit $P(n)$ la propriété "$e = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} + \dfrac{e}{n!}\displaystyle\int_0^1 u^n e^{-u} du$".

La propriété $P(0)$ est vraie car on a : $1 + e\int_0^1 e^{-u} du = 1 + e\left[-e^{-u}\right]_0^1 = 1 + e\left[-e^{-1} + 1\right] = e$.

Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour un entier donné n. On a donc $e = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} + \dfrac{e}{n!}\displaystyle\int_0^1 u^n e^{-u} du$.

Intégrons $\displaystyle\int_0^1 u^n e^{-u} du$ par parties en posant $U = e^{-u}, U' = -e^{-u}$ et $V' = u^n$, $V = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ donc $\int_0^1 u^n e^{-u} du = \left[e^{-u}\dfrac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 e^{-u} u^{n+1} du = e^{-1}\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 e^{-u} u^{n+1} du$, d'où $e = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} + \dfrac{e}{n!}\left[e^{-1}\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 e^{-u} u^{n+1} du\right]$, soit $e^x = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{e}{(n+1)!}\displaystyle\int_0^1 u^n e^{-u} du$, donc $P(n+1)$ est vraie.

La propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n.

Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ (somme partielle de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$). On a donc $S_n = e - \frac{e}{n!}\int_0^1 u^n e^{-u}du$.

Pour $u \in [0,1]$ on a $0 \leq u^n e^{-u} \leq 1$ donc $0 \leq \int_0^1 u^n e^{-u}du \leq \int_0^1 du = 1$, d'où $0 \leq \frac{e}{n!}\int_0^1 u^n e^{-u}du \leq \frac{e}{n!}$.

Il en résulte (d'après le théorème de l'étau) que la suite $\frac{e}{n!}\int_0^1 u^n e^{-u}du$ converge vers 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = e$ ce qui s'écrit : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e}$.

22 **a.** On a $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc la série diverge car son terme général ne tend pas vers 0;

b. La série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3-n}$ est à termes positifs et $\frac{1}{n^3-n} \sim \frac{1}{n^2}$ terme général d'une série convergente (série de Riemann $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$avec $\alpha = 2 > 1$) donc elle est convergente.

c. la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$ n'est pas à termes positifs; voyons si elle est absolument convergente : on a $\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}\right| = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \sim \frac{1}{4n^2}$ terme général d'une série convergente donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$ est absolument convergente donc convergente;

d. Pour $x \in [k, k+1]$ on a $k \leq x \leq k+1$ donc $\sqrt{k} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{k+1}$ et en intégrant de k à $k+1$ on obtient : $\sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{x}dx \leq \sqrt{k+1}$. En sommant de $k=0$ à n on obtient : $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} \leq \int_0^{n+1} \sqrt{x}dx \leq \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+1}$. Cet encadrement s'écrit $\int_0^n \sqrt{x}dx \leq \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} \leq \int_0^{n+1} \sqrt{x}dx$;

e. La série est à termes positifs et on a $0 \leq \arctan n \leq \frac{\pi}{2}$, donc $0 \leq \frac{\arctan n}{n^2} \leq \frac{\pi}{2}.\frac{1}{n^2}$. Comme $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\arctan n}{n^2}$ converge;

f. Effectuons le dl du terme général. On a, au voisinage de 0, $\tan x = x + o(x^2)$ et $\sin x = x + o(x^2)$, donc $\tan\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc le terme général est équivalent à $\frac{1}{n}$, terme général d'un série divergente, donc la série est divergente;

g. La série est à terms positifs et on a $\frac{(1+n)\sin n}{n^2\sqrt{n}} \leq \frac{(1+n)}{n^2\sqrt{n}}$; on a $\frac{(1+n)}{n^2\sqrt{n}} \sim \frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ terme général d'une série convergente, donc la série converge;

h. Ici la série n'est pas à termes positifs donc on regarde si elle est absolument convergente. On a $\left|\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{e^n}\right| = \frac{\sqrt{n}}{e^n}$. D'autre part on a $\frac{n^2\sqrt{n}}{e^n} = e^{2\ln n + \frac{1}{2}\ln n - n} = e^{\frac{5}{2}\ln n - n}$, soit $\frac{n^2\sqrt{n}}{e^n} = e^{\frac{5}{2}n\left(\frac{\ln n}{n}-1\right)}$; comme $\frac{\ln n}{n} \to 0$, on a $\frac{n^2\sqrt{n}}{e^n} \to 0$ donc $\frac{\sqrt{n}}{e^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, terme général d'une série convergente, donc la série est absolument convergente, donc convergente.

Comme $\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}$ on obtient $\frac{2}{3}n^{3/2} \leq \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} \leq \frac{2}{3}(n+1)^{3/2}$. Il en résulte que $\frac{\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}}{\frac{2}{3}n^{3/2}} \longrightarrow 1$ donc $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3}n^{3/2}$.

On a donc $\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n^{\alpha}} \sim \frac{2}{3}\frac{1}{n^{\alpha-3/2}}$. C'est le terme d'une série convergente ssi $\alpha - \frac{3}{2} > 1$ soit $\alpha > \frac{5}{2}$.

La série étant à termes positifs, elle converge ssi $\alpha > \frac{5}{2}$.

$\boxed{\mathbf{23}}$ **1.** Pour $k \leq t \leq k+1$ on a $\sqrt{k} \leq \sqrt{t} \leq \sqrt{k+1}$(car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$). En intégrant membres à membres entre k et $k+1$ on obtient : $\boxed{\sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{x}dx \leq \sqrt{k+1}}$.

En sommant ces inégalités de 1 à n et grâce à la relation de Chasles pour les intégrales on a : $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{x}dx \leq \sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n+1}$.

Cet encadrement peut s'écrire $\int_1^{n} \sqrt{x}dx + 1 \leq \sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{x}dx$ pour tout entier naturel n. Comme $\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}$ on obtient $\frac{2}{3}\left(n^{3/2}-1\right)+1 \leq \sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n} \leq \frac{2}{3}\left[(n+1)^{3/2}-1\right]$.

En divisant les trois membres par $\frac{2}{3}n^{2/3}$ le premier et troisième membre tendent vers 1 donc, d'après le théorème de l'étau, $\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{\frac{2}{3}n^{2/3}} \to 1$ soit $\boxed{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n} \sim \frac{2}{3}n^{2/3}}$.

2. On a une série à termes positifs et son terme général est équivalent d'après 1/ à $\frac{2}{3}\frac{n^{2/3}}{n^{\alpha}} = \frac{2}{3}\frac{1}{n^{\alpha-\frac{2}{3}}}$. Or la série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha-\frac{2}{3}}}$ converge sii $\alpha - \frac{2}{3} > 1$ (série de Riemann) donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n^{\alpha}}$ converge ssi $\alpha > \frac{5}{3}$.

$\boxed{\mathbf{24}}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on a $2 - e^{-\frac{1}{n}} > 0$ donc $\ln\left(2 - e^{-\frac{1}{n}}\right) > 0$ pour ≥ 1 donc la série est à terme positifs.

Or, au voisinage de 0, $e^t = 1 + t + o(t)$.

Donc, $e^{-\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ au voisinage de l'infini et $\ln\left(2 - e^{-\frac{1}{n}}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

On a donc $\ln\left(2 - e^{\frac{1}{n}}\right) \sim \frac{1}{n}$.

La série $\sum \frac{1}{n}$ étant divergente (série harmonique) on en déduit que la série $\sum \ln\left(2 - e^{\frac{1}{n}}\right)$ diverge vers $+\infty$.

$\boxed{\mathbf{25}}$ **1.** La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ (produit de fonctions dérivables) et :

$$\forall x \in [0,1], f'(x) = 2e^x(x+1).$$

On a donc : $\forall x \in [0,1], f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0,1]$ .f étant continue c'est donc une bijection de $[0,1]$ sur $[f(0), f(1)] = [0, 2e]$.

La bijection réciproque f^{-1} de f est une bijection de $[0,2e]$ dans $[0,1]$, continue, strictement croissante.

2. L'équation $xe^x = 1$ est équivalente à $f(x) = 2$. Comme $2 \in [0, 2e]$, cette équation a une unique solution α dans $[0, 1]$ (l'antécédent de 2 par f).

Comme $f(0)$ et $f(1)$ sont différents de 2 on a $\alpha \in]0, 1[$.

3. Récurrence sur n. Soit la propriété $P(n)$: "$0 < u_n < 1$".

Elle est vraie pour $n = 0$ d'après 2/.

Supposons P_n vraie pour un certain entier n : $0 < u_n < 1$. La fonction f^{-1} étant une application strictement croissante de $[0, 2e]$ dans $[0, 1]$ on a : $f^{-1}(x) \in]0, 1[$ pour $x \in]0, 2e[$ donc $f^{-1}(u_n) \in]0, 1[$ soit $0 < u_{n+1} < 1$ et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.

4. On a : $\forall x \in [0, 1], f(x) - x = x(2e^x - 1)$. Pour $x \geq 0$ on a $e^x \geq 1$ donc $2e^x - 1 > 0$ d'où $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

On a $f(x) - x = 0$ ssi $x(2e^x - 1) = 0$. Comme $2e^x - 1 \neq 0$ sur $[0, 1]$ c'est équivalent à $x = 0$.

En remplaçant x par u_n dans l'inégalité $f(x) \geq x$ (possible car $u_n \in [0, 1]$) on obtient $f(u_n) \geq u_n$, et en prenant l'image par f^{-1} (croissante) il vient $u_n \geq f^{-1}(u_n) = u_{n+1}$. La suite (u_n) est décroissante.

5. Comme elle décroissante et minorée (par 0) elle est donc convergente.

Sa limite l vérifie $f^{-1}(l) = l$ (car f^{-1} continue en l) soit $f(l) = l$ en composant par f, donc $l = 0$ d'après la question précédente.

$\boxed{\mathbf{26}}$ **1.** La représentation graphique classique donne un "escalier qui descend" : on conjecture que la suite (u_n) est tend vers 0 en décroissant.

De plus on a $f'(x) = \frac{(1-x^2)}{(x^2+x+1)^2}$ donc f est croissante sur $[0, 1]$.

On montre d'abord par récurrence que pout tout n on a $P(n) : 0 \leq u_n \leq 1$.

La propriété est vraie au rang 0. Si elle est vraie pour un entier n donné on a : $0 < u_n \leq 1$ donc $f(0) < f(u_n) \leq f(1)$ (car f croissante sur $[0, 1]$) donc $0 < u_{n+1} \leq 1/3 < 1$ et $P(n + 1)$ est vraie.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 1$.

De plus, pour tout entier naturel n, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n^2+u_n+1} < 1$ (car $u_n > 0$) donc la suite (u_n) est (strictement) décroissante car à termes > 0. Comme elle est minorée par 0 elle est convergente. Si l est sa limite on obtient par passage à la limite : $l = \frac{l}{l^2+l+1}$ soit $l(l^2 + l + 1) = l$ ce qui équivaut à $l^2(l + 1) = 0$, dont les solutions sont $l = 0$ ou $l = -1$. Comme (u_n) est une suite à termes positifs on a $l \geq 0$ donc finalement $\boxed{\lim u_n = 0}$.

2. Pour tout entier naturel non nul p on a : $f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1/p}{(1/p)^2+1/p+1} = \frac{p}{1+p+p^2} \leq \frac{p}{p+p^2}$ (car $1 + p + p^2 \geq p + p^2$) soit $f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}$.

3. Soit la propriété $P(n)$: "$0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$". $P(0)$ est vraie car $u_0 = 1 \leq 1$.

Si elle est vraie pour un entier n donné on a : $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$ donc $f(0) < f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$ (car f croissante sur $[0, 1]$) et comme $f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+2}$ (question précédente) on a $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$ et $P(n + 1)$ est vraie.

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}}$.

D'après le théorème de l'étau on retrouve que la suite (u_n) tend vers 0.

4. Soit la propriété $P(n)$: $\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. $P(1)$ est vraie car $u_1 = \frac{1}{3}$.

Supposons qu'elle soit vraie pour un entier n donné. On a $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$ et $u_n \leq \frac{1}{n+1}$ (2/) et $\frac{1}{u_n} \leq n+1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (hypothèse de récurrence) donc $\frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}+1+n+1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n+2+\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$ et $P(n+1)$ est vraie.

La propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

5. En sommant les inégalités $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$ pour $k = 2$ à n il vient : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} = \ln n$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1+\ln n$ pour $n \geq 2$. D'après la question précédente on a donc $\boxed{\forall n \geq 2, \frac{1}{u_n} \leq n+2+\ln n}$.

On en déduit que $u_n \geq \frac{1}{n+2+\ln n}$ pour $n \geq 2$ et d'après la question 3/ on obtient l'encadrement :

$$\forall n \geq 2, \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+2+\ln n}.$$

En mulitipliant par n : $\frac{n}{n+1} \leq n u_n \leq \frac{n}{n+2+\ln n}$. Or $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ et $\frac{n}{n+2+\ln n} = \frac{1}{1+2/n+\ln n/n} \longrightarrow 1$ (car $\frac{\ln}{n} \longrightarrow 0$) donc, d'après le théorème de l'étau : $\lim n u_n = 1$ soit $\lim \frac{u_n}{1/n} = 1$ ou encore $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}}$.