$\boxed{\textbf{AR1}}$ *Formule de Poincaré et dérangements d'un ensemble*

Si A est un ensemble fini on note $|A|$ son cardinal.

1. Soient A_1, A_2, A_3 trois ensembles finis.

Calculer $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ en fonction de $|A_1|, |A_2|$ et $|A_3|$.

2. *Généralisation*

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 1)$ des ensembles finis. Montrer que :

$$\begin{aligned} \left|A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n\right| &= \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} \left|A_i \bigcap A_j\right| + \ldots + (-1)^{n-1} \left|A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n\right| \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \left|A_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap A_{i_k}\right| \text{ (\textit{Formule de Poincaré})} \end{aligned}$$

On appelle *dérangement* de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ n'ayant aucun point fixe (i.e. une permutation σ telle que $\sigma(k) \neq k$ pour tout k de $\{1, 2, \ldots, n\}$).

3. Pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on note E_i l'ensemble de permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telles que $\sigma(i) = i$.

Calculer $|E_i|$.

En déduire $|E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_k}|$ pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

4. Soit D_n l'ensemble des dérangements de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Déduire des questions précédentes $|D_n|$ en fonction de n (on écrira $|D_n| = n! x_n$, la suite x_n étant écrite sous forme d'une somme).

Exemple : dans une copropriétés les 10 résidents ont 10 places de parking réservées et numérotées.

Quelle est le nombre de façons qu'ils ont de se garer pour qu'aucun de soit à sa place ?[ex8.2015]

5. *Problème des chapeaux*

Au début d'une soirée n personnes $(n \in \mathbb{N}^*)$ accrochent leur chapeau à l'entrée (on suppose que chaque personne possède un chapeau).

a. Calculer la probabilité p_n pour qu'aucune des personnes ne se retrouve avec son chapeau.

b. Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel n on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^x}{n!} \int_0^x u^n e^{-u} du.$$

En déduire la limite de p_n quand n tend vers l'infini.

<u>*Correction*</u> :

1. Compte tenue de la relation $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ **(*)** pour deux ensembles finis A et B (voir cours !) et de l'associativité de l'union il vient : $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |(A_1 \cup A_2) \cup A_3| = |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3|$. En réappliquant la formule (*) à $|A_1 \cup A_2|$ on obtient :

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3|.$$

D'autre part, l'intersection étant distributive sur l'union on a : $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$, donc $|(A_1 \cup A_2) \cap A_3| = |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)|$, et en réappliquant (*) on obtient $|(A_1 \cup A_2) \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)|$.

Or $(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3) = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, donc $|(A_1 \cup A_2) \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.

Finalement :

$$\boxed{|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.}$$

2. Récurrence sur n.

Soit $P\left(n\right)$ la propriété : "pour tous ensembles finis $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $|A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n| = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(-1\right)^{k-1} \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} |A_{k_1} \bigcap \ldots \bigcap A_{i_k}|$".

La formule est vraie pour $n = 1$, $n = 2$ (c'est la formule (*)), et $n = 3$ d'après 1/.

Supposons qu'elle soit vraie pour n donné.

On généralise le calcul de la question 3/ :

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}| &= |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}| \text{ (cas } n = 2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(-1\right)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} |A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \end{aligned}$$

Par distributivité on a : $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1} = (A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$|(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})| = \sum_{k=1}^{n} \left(-1\right)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \left|A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}\right|,$$

donc $|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}| = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(-1\right)^{k-1} \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} |A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}|$, d'où

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}| &= \sum_{k=1}^{n} \left(-1\right)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} |A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + |A_{n+1}| - \sum_{k=1}^{n} \left(-1\right)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(-1\right)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} |A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + |A_{n+1}| + \sum_{k=1}^{n} \left(-1\right)^{k} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(-1\right)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n+1} \left|A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right|, \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie pour $n + 1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Un élément de E_i est uniquement déterminé par une bijection de $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ dans lui-même, donc $|E_i| = (n-1)!$.

De même $|E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_k}| = (n-k)!$.

4. Soit P_n l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Les éléments de $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$ sont les permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ qui invarient au moins un élément de $\{1, 2, \ldots, n\}$, donc on a $D_n = P_n - E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$.

D'après les questions précédente on a $|E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n| = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(-1\right)^{k-1} \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} |E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_k}|$.

$\sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} |E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_k}|$ est le cardinal de l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ qui invarient tout sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de cardinal k : il y-a $\dbinom{n}{k}$ façons de choisir un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$ à k éléments et $|E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_k}| = (n-k)!$, donc $\sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} |E_{k_1} \cap \ldots \cap E_{i_k}|$

$\dbinom{n}{k} \times (n-k)! = \dfrac{n!}{k!}$.

Finalement $|E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n| = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{n!}{k!}$, soit $|D_n| = n! - \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{n!}{k!} = n!\left(1 - \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\right.$ $\left. n!\left(\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{1}{k!}\right)\right.$, donc

$$|D_n| = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Exemple : le nombre de façons qu'ont les résidents de se garer sans qu'aucun ne soit à sa place est le nombre de dérangements d'un ensemble à 10 éléments, soit $|D_{10}| = 1334961$.

5. a. Le nombre de façons qu'on les n personnes de choisir un chapeau est $n!$ (nombre de permutations des n chapeaux). Le nombre de façons qu'on les n personnes de choisir un chapeau sans qu'aucun n'ait le sien correspond au nombre de dérangements de ces n chapeaux. On a donc $p_n = \frac{n!}{|D_n|} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{n!}$ (d'après la question précédente).

b. Soit $P(n)$ la propriété "$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^x}{n!} \int_0^x u^n e^{-u} du$".

La propriété $P(0)$ est vraie car, pour tout réel x on a : $1 + e^x \int_0^x e^{-u} du = 1 + e^x \left[-e^{-u}\right]_0^x = 1 + e^x \left[-e^{-x} + 1\right] = e^x$.

Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour un entier donné n. On a donc, pour tout réel x, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^x}{n!} \int_0^x u^n e^{-u} du$. Intégrons $\int_0^x u^n e^{-u} du$ par parties en posant $U = e^{-u}, U' = -e^{-u}$ et $V' = u^n$, $V = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ donc $\int_0^x u^n e^{-u} du = \left[e^{-u} \frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^x + \frac{1}{n+1} \int_0^x e^{-u} u^{n+1} du = e^{-x} \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int_0^x e^{-u} u^{n+1} du$, d'où $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^x}{n!} \left[e^{-x} \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int_0^x e^{-u} u^{n+1} du\right]$, soit $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{e^x}{(n+1)!} \int_0^x u^n e^{-u} du$, donc $P(n+1)$ est vraie.

La propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n.

En remplaçant x par -1 dans la formule précédente on obtient $e^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} + \frac{e^{-1}}{n!} \int_0^{-1} u^n e^{-u} du$, soit $p_n = e^{-1} + \frac{e^{-1}}{n!} \int_{-1}^0 u^n e^{-u} du$.

Pour $-1 \leq u \leq 0$ on a $0 \leq |u| \leq 1$, donc $0 \leq |u|^n \leq 1$ et $1 \leq e^{-u} \leq e$, donc $0 \leq |u|^n e^{-u} \leq e$.

On a donc $\left|\int_{-1}^0 u^n e^{-u} du\right| \leq \int_{-1}^0 |u|^n e^{-u} du \leq \int_{-1}^0 e du = e$, d'où $\left|\frac{e^{-1}}{n!} \int_{-1}^0 u^n e^{-u} du\right| \leq \frac{1}{n!}$.

Il en résulte (d'après le théorème de l'étau) que la suite $\frac{e^{-1}}{n!} \int_{-1}^0 u^n e^{-u} du$ converge vers 0 donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = e^{-1} = \frac{1}{e}}$.