

**AR2** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls.

On note  $S(n, p)$  le nombre d'applications surjectives d'un ensemble  $E$  à  $n$  éléments dans un ensemble  $F$  à  $p$  éléments.

1. Calculer  $S(n, 1)$ ,  $S(n, n)$ ,  $S(n, p)$  si  $p > n$ .

Dans la question suivante on veut calculer  $S(n, 2)$  pour  $n \geq 2$ . On pose  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de cardinal  $n \geq 1$  et  $F = \{y_1, y_2\}$  de cardinal 2.

2. Soit  $f$  une surjection de  $E$  dans  $F$ .

a. Quel peut être le nombre  $k$  d'antécédents de  $y_1$  ? Quel est le nombre de surjections de  $E$  dans  $F$  tels que  $y_1$  possède  $k$  antécédents ?

b. En déduire que  $S(n, 2) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}$  puis que  $S(n, 2) = 2^n - 2$ .

Dans la question suivante  $E$  est un ensemble de cardinal  $n+1$  et  $F$  un ensemble de cardinal  $p+1$ .

Soit  $a \in E$  un élément fixé de  $E$ .

3. a. Combien y-a-t'il de surjection  $f : E \longrightarrow F$  tels que la restriction de  $f$  à  $E \setminus \{a\}$  soit surjective ?

b. Combien y-a-t'il de surjection  $f : E \longrightarrow F$  tels que la restriction de  $f$  à  $E \setminus \{a\}$  ne soit pas surjective ?

c. En déduire que

$$S(n+1, p+1) = (p+1)[S(n, p+1) + S(n, p)].$$

4. Montrer que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal 1 on a

$$S(n, 3) = 3 - 3 \times 2^n + 3^n.$$

5. En utilisant les questions précédentes, calculer le nombre de façons de ranger  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  dans 3 urnes  $A, B$  et  $C$  telles qu'aucune urne ne soit vide (on peut placer entre 0 et  $n$  boules dans chaque urnes). Correction :

1. Il est clair que  $S(n, 1) = 1$ .

S'il existe une application surjective de  $E$  dans  $F$  alors  $\text{Card} E \leq \text{Card} F$  (voir le cours !), donc  $S(n, p) = 0$  si  $p > n$ .

Une application d'un ensemble fini dans un autre de même cardinal est surjective ssi elle est bijective. Donc le nombre d'applications surjectives d'un ensemble à  $n$  éléments dans un ensemble à  $p$  éléments est le nombre d'applications bijectives d'un ensemble à  $n$  éléments dans un ensemble à  $p$  éléments, soit  $S(n, n) = n!$ .

2. a.  $f$  étant surjective,  $y_1$  a au moins un antécédent.  $y_1$  ne peut avoir  $n$  antécédents (sinon  $y_2$  n'en aurait pas et  $f$  ne serait pas surjective) donc  $1 \leq k \leq n-1$ .

L'ensemble des antécédents de  $y_1$  est un sous-ensemble de  $E$  de cardinal  $k$ . Il y-a  $\binom{n}{k}$  façon de choisir un tel ensemble. L'ensemble  $E_1$  des antécédents de  $y_1$  étant choisi, il n'y-a qu'une façon de choisir l'ensemble des antécédents de  $y_2$  : c'est  $E_2 = \overline{E_1}$ , complémentaire de  $E_1$  dans  $E$ .

Il y-a donc  $\binom{n}{k}$  surjections de  $E$  dans  $F$  telles que  $y_1$  possède  $k$  antécédents.

**b.** D'après la question précédente on a  $S(n, 2) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}$ .

D'autre part on a  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  (en développant  $(1+1)^n$  par la formule du binôme de Newton), donc  $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = 2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{n} = 2^n - 2$ . Donc  $S(n, 2) = 2^n - 2$ .

*Remarque* : cette formule est vraie aussi si  $n = 1$  ( $S(1, 2) = 0$ ).

**3. a.** Il y-a  $S(n, p+1)$  surjections de  $E \setminus \{a\}$  dans  $F$ . Une telle surjection étant choisie, il y-a  $p+1$  façons de choisir l'image de  $a$ , donc il y-a  $(p+1) S(n, p+1)$  surjection  $f : E \longrightarrow F$  tels que la restriction de  $f$  à  $E \setminus \{a\}$  soit surjective.

**b.** Si une surjection  $f : E \longrightarrow F$  est telle que la restriction de  $f$  à  $E \setminus \{a\}$  ne soit pas surjective alors l'élément  $y = f(a)$  de  $F$  a un seul antécédent :  $a$ . Il y-a  $p+1$  façons de choisir l'image de  $a$  par  $f$ ; ce choix étant fait il reste à choisir une surjection de  $E \setminus \{a\}$  dans  $F \setminus \{f(a)\}$  et il y-en a  $S(n, p)$ .

Il y-a  $(p+1) S(n, p)$  surjection  $f : E \longrightarrow F$  tels que la restriction de  $f$  à  $E \setminus \{a\}$  ne soit pas surjective.

**c.** D'après la question précédente on a  $S(n+1, p+1) = (p+1) S(n, p+1) + (p+1) S(n, p)$ , soit  $S(n+1, p+1) = (p+1) [S(n, p+1) + S(n, p)]$ .

**4.** Récurrence sur  $n$  en utilisant les questions 2/ et 3/.

**5.** Ranger  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  dans 3 urnes  $A, B$  et  $C$  comme indiqué dans l'énoncé c'est choisir une surjection de  $\{1, 2, \dots, n\}$  dans  $\{A, B, C\}$  (à  $i$  on associe l'urne où est placée la boule n° $i$ ). Le nombre de façons de ranger  $n$  boules dans les urnes  $A, B, C$  est donc  $S(n, 3) = 3 - 3 \times 2^n + 3^n$ .