Pour n et k entiers naturels non nuls, soit $M(n,k)$ le nombre de façons de placer k maisons identiques dans une rue aux emplacements numérotées de 1 à n telle qu'aucune ne soit placée à côté d'une autre (par exemple si on a $n=5$ et 2 maisons, on peut les placer aux emplacements 1 et 3 ou 2 et 4 etc...).

1. Calculer $M(n,1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a. Combien y -a t'il de façons de placer 2 maisons sur n emplacements s'il n'y-a pas de contraintes de proximité entre deux maisons ?

b. En déduire que pour $n \geq 2$

$$M(n,2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

3. Montrer que pour tout entier nature non nul n

$$M(n+2,k+1) = M(n,k) + M(n+1,k+1).$$

(*Indication* : considérer deux cas suivant que l'on place une maison au numéro $n+2$ ou non).

4. En la formule précédente pour $k=2$ et par un procédé "en cascade", montrer que pour $n \geq 2$

$$M(n,3) = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6}$$

(On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

5. Démontrer par récurrence sur n que $M(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$ pour tous entiers naturels k et n.

(On a $\binom{p}{q} = 0$ si $p < q$ ou si $p < 0$).

Que devient la formule précédente si les k maisons sont distinctes deux à deux ?

<u>*Correction*</u> : **1.** On peut placer la maison aux emplacements $1, 2, \ldots, n$ donc $\boxed{M(n,1) = n}$.

2. a. Le nombre de façons de placer les deux maisons est le nombre de façons de choisir deux entiers i et j (leur emplacement) dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, sans répétition et sans tenir compte de l'ordre, donc il y-a ce nombre est $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

b. Le nombre de façons de mettre les deux maisons sur n emplacements côte à côte est $n-1$ $((1,2), (2,3), \ldots, (n-1,n))$. On a donc $M(n,2) = \binom{n}{2} - (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$, soit $\boxed{M(n,2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}}$.

3. <u>1er cas</u> : si on place une maison au numéro $n+2$, il reste à placer k maisons aux emplacements $1, 2, \ldots, n$ sans que deux maisons soient contigües, donc il y-a $M(n,k)$ façons de le faire.

<u>2ième cas</u> : s'il n'y a pas de maison au numéro $n+2$, on place $k+1$ maisons aux numéros $1, 2, \ldots, n+1$ sans que deux maisons soient contigües, donc il y-a $M(n+1,k+1)$ façons de le faire.

On a donc $\boxed{M(n+2,k+1) = M(n+1,k+1) + M(n,k)}$.

4. En appliquant la formule précédent pour $k=2$ et $n+2=i$ on a $M(i,3) - M(i-1,3) = M(i-2,2)$ pour $i \geq 3$. En sommant de $i=3$ à n on obtient , après simplifications : $M(n,3) - M(2,3) = \sum_{i=1}^{n-2} M(i,2)$ soit $M(n,3) = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(i-2)(i-1)}{2}$ (car $M(2,3)=0$).

On a $\sum_{i=1}^{n-2} \frac{(i-2)(i-1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} (i^2 - 3i + 2) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n-2} i^2 - 3\sum_{i=1}^{n-2} i + 2(n-2)\right]$. Or $\sum_{i=1}^{n-2} i^2 = \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}$ et $\sum_{i=1}^{n-2} i = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$, d'où $M(n,3) = \frac{n-2}{6}\left[n^2 - 7n + 12\right]$, soit $\boxed{M(n,3) = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6}}$ (formule valable aussi si $n=2$).

5. Soit la propriété $P(n)$: "$\forall k \in \mathbb{N}^*, M(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$", pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$P(1)$ est vraie car $M(1,k) = 1 = \binom{1}{1}$ si $k=1$ et $0 = \binom{2-k}{k}$ si $k \geq 2$.

$P(2)$ est vraie car $M(2,k) = 0 = \binom{3-k}{k}$ si $k \geq 2$ et $M(2,1) = 2 = \binom{2}{1}$ si $k=1$.

Supposons $P(i)$ vraie pour tout entier i inférieur ou égal à un entier nauturel fixé n (récurrence forte). D'après 3/ on a $M(n+1,k) = M(n-1,k-1) + M(n,k) = \binom{n-k+1}{k-1} + \binom{n-k+1}{k} = \binom{n-k+2}{k}$ (car $\binom{p}{i-1} + \binom{p}{i} = \binom{p+1}{i}$) donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence forte la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.