$\boxed{\textbf{ED1}}$ Soit l'équation différentielle : $(x^2+1)\,y" - 2y = 0$ **(E)**.

1. Montrer que si un polynôme non nul est solution il ne peut être que de degré 2. Trouver un tel polynôme y_0 dont le terme de plus haut degré est x^2.

2. On effectue le changement d'inconnue défini par $y = y_0.z$.

Montrer que y vérifie **(E)** si et seulement si z vérifie une équation différentielle **(E')** à préciser.

3. Intégrer par partie $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$. En déduire que

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2\,(1+x^2)}.$$

4. Résoudre l'équation **(E)**.

<u>*Correction*</u> : **1.** Soit P un polynôme solution de (E) et ax^n $(a \neq 0)$ son terme de plus haut degré. Le terme de plus haut degré de $(x^2+1)\,P" - 2P$ est $[n\,(n-1)-2]\,ax^n$ si $n \geq 2$ et $-2ax^n$ si $0 \leq n \leq 1$. On a donc $n\,(n-1)-2 = 0$, soit $n = 2$. Réciproquement $P(x) = ax^2+bx+c$ est solution de (E) ssi $-2bx+2a-2c = 0$, soit $b = 0$ et $a = c$. Par exemple $y_0 = x^2+1$ est solution de (E).

2. Si y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ on écrit $y = (x^2+1)\,z$ avec $z = \frac{y}{x^2+1}$ qui est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose $y = y_0 z = (x^2+1)\,z$ d'où $y" = 2z + 4xz' + (x^2+1)\,z"$ et y est solution de (E) ssi $(x^2+1)\,[2z+4xz'+(x^2+1)\,z"] - 2\,(x^2+1)\,z = 0$ soit $\boxed{4xz' + (x^2+1)\,z" = 0 \text{ (E')}}$.

3. On intègre par parties en posant $u = x$ et $v' = \frac{x}{(1+x^2)^2}; u' = 1, v = -\frac{1}{2(1+x^2)}$ (u et v de classe C^1 sur $\mathbb{R}$). On obtient $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x$.

On écrit $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{(1+x^2-x^2)dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{(1+x^2)} - \int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$, soit $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\arctan x = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)}$.

4. En posant $Z = z'$ **(E')** équivaut à $4xZ + (x^2+1)\,Z' = 0$, soit $Z' + \frac{4x}{1+x^2}Z = 0$. Les solutions de cette dernière équation différentielle sont $Z = Ce^{-2\ln(x^2+1)} = \frac{C}{(x^2+1)^2}$. On obtient donc $z' = \frac{C}{(x^2+1)^2}$ soit $z = C\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} + C' = \frac{C}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C'$.Les solutions de (E) sont donc $y = y_0.z$ soit $\boxed{y(x) = K\,[(x^2+1)\arctan x + x] + C'\,(1+x^2)}$ (en posant $K = \frac{C}{2}$).