

EF1 Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y)] \quad (*).$$

1. Soit $f \in E$. Montrer que $f(0) = 0$ et que f est paire.

2. a. Soit x un réel. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$f(nx) = n^2 f(x).$$

b. On pose $f(1) = a$.

Montrer que pour tout entier relatif n on a : $f(n) = an^2$.

c. Calculer $f(\frac{1}{n})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $f(x) = ax^2$ pour tout nombre rationnel x .

d. Trouver toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (*) (indication : on pourra utiliser que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

3. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x+y) \cdot g(x-y) = [g(x)g(y)]^2 \quad (**).$$

a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 0)$.

b. Trouver toutes les fonction g continues ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ vérifiant (**). [ex6.2014]

Correction : 1. En prenant $x = y = 0$ dans (*) on obtient : $2f(0) = 4f(0)$, soit $f(0) = 0$.

En prenant $x = 0$ et y quelconque : $f(y) + f(-y) = 2[f(0) + f(y)] = 2f(y)$, soit $f(-y) = f(y)$, donc la fonction f est paire.

2. a. Soit $P(n)$ la propriété " $\forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = n^2 f(x)$ ". Montrons que cette propriété est vraie pour tout n en utilisant une récurrence forte.

La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Soit n un entier naturel fixé $n \geq 1$ et supposons la propriété $P(k)$ vraie pour $k = 0, 1, \dots, n$.

Pour tout réel x on a : $f((n+1)x) = f(nx+x) = 2[f(nx) + f(x)] - f(nx-x)$ (d'après (*) en remplaçant x et y par nx et x respectivement). Comme $P(n)$ et $P(n-1)$ sont vraies on a $f(nx) = n^2 f(x)$ et $f(nx-x) = f((n-1)x) = (n-1)^2 f(x)$ d'où :

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= 2[n^2 f(x) + f(x)] - (n-1)^2 f(x) \\ &= [2n^2 + 2 - (n-1)^2] f(x) \\ &= [n^2 + 1 + 2n] f(x) = (n+1)^2 f(x). \end{aligned}$$

La propriété $P(n+1)$ est donc vraie.

D'après le principe de "récurrence forte" la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

b. En posant $x = 1$ dans la relation précédente on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an^2$$

Si $n \in \mathbb{Z}^-$, on a $-n \in \mathbb{N}$, donc $f(-n) = a(-n)^2 = an^2$, et comme f est paire, $f(n) = an^2$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = an^2}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f(n \times 1/n) = f(1) = a$, d'une part, et d'autre part, d'après 2/a/, $f(n \times 1/n) = n^2 f(1/n)$ (en prenant $x = 1/n$), soit $a = n^2 f(1/n)$ donc $\boxed{f(1/n) = a/n^2}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a , $f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p \times \frac{1}{q}\right) = p^2 f\left(\frac{1}{q}\right)$ (2/a/ avec $x = 1/q$) soit $f\left(\frac{p}{q}\right) = p^2 \frac{a}{q^2}$ (d'après la relation précédente). On a donc $f(x) = ax^2$ pour tout rationnel positif x .

Comme en b/ on en déduit, en utilisant la parité, de f que $\boxed{\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = ax^2}$.

d. Soit x un réel. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ il existe une suite de rationnels (r_n) qui converge vers x . Pour tout entier n on a $f(r_n) = ar_n^2$ (d'après 2/ c/). Or $ar_n \longrightarrow ax$ et $f(r_n) \longrightarrow f(x)$ (car f est continue en x). En passant l'égalité $f(r_n) = ar_n^2$ à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $f(x) = ax^2$.

Réciproquement (synthèse) : les fonctions $x \longmapsto ax^2$ sont continue sur $\mathbb{R}$ et vérifient (*).

Conclusion : l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (*) est $\{x \longmapsto ax^2/a \in \mathbb{R}\}$.

3. a. En prenant $x = y$ dans (**) il vient : $\forall x \in \mathbb{R}, g(2x) \times g(0) = g(x)^4 \geq 0$, donc :

- si $g(0) = 0$ alors $g(x) = 0$ pour tout réel x ;
- si $g(0) > 0$ alors on a $g(2x) \geq 0$ pour tout réel x ;
- si $g(0) < 0$ alors on a $g(2x) \leq 0$ pour tout réel x .

Conclusion : on a $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 0)$.

b. Supposons par exemple que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$. En prenant le $\ln$ des deux membres de (**) on obtient la relation équivalente $\ln g(x+y) + \ln g(x-y) = 2[\ln g(x) + \ln g(y)]$, i.e. la fonction $\ln g$ vérifie (*). D'après 2/ c'est équivalent à : $\exists a \in \mathbb{R}/\forall x \in \mathbb{R}, \ln g(x) = ax^2$, soit $g(x) = e^{ax^2}$.

Si $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$, $-g$ vérifie (**), soit $g(x) = -e^{ax^2}$.

Finalement l'ensemble des fonction g continues et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ vérifiant (**) est $\left\{x \longmapsto \pm e^{ax^2}\right\}$.