$\boxed{\textbf{EF3}}$ On rappelle que les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y),$$

sont les fonctions linéaires : $x \longmapsto ax$.

On cherche les fonctions g de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x+y) = \frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)} \qquad \textbf{(*)}\ .$$

1. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

Etudier la surjectivité et l'injectivité de φ.

Montrer que φ réalise une bijection (qu'on continuera à appeler φ) de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ et préciser sa bijection réciproque.

2. Montrer que pour tous réels x et y on a :

$$\varphi(x+y) = \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{1+\varphi(x)\varphi(y)}.$$

3. En déduire que pour tous réels x' et y' de l'intervalle $]-1,1[$ on a $\frac{x'+y'}{1+x'y'} \in]-1,1[$ et que :

$$\forall (x',y') \in]-1,1[^2, \varphi^{-1}\left(\frac{x'+y'}{1+x'y'}\right) = \varphi^{-1}(x') + \varphi^{-1}(y').$$

4. Pour trouver l'ensemble des fonctions vérifiant (*) on procède par analyse-synthèse.

Soit donc g une application de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ vérifiant (*).

On pose $h = \varphi^{-1} \circ g$.

Exprimer $h(x+y)$ en fonction de $h(x)$ et de $h(y)$.

En déduire l'ensemble des fonctions g continues de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ vérifiant **(*)**.

Correction :

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout l'équation $y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Elle est équivalente à $ye^x + y = e^x - 1$ ou encore $e^x(1-y) = 1+y$.

Si $y = 1$ cette équation équivaut à $0.e^x = 1$ qui n'admet pas de solution.

Si $y \neq 1$ elle est équivalente à $e^x = \frac{1+y}{1-y}$.

- si $\frac{1+y}{1-y} \leq 0$ soit $y \in]-\infty,-1] \cup]1,+\infty[$, l'équation est impossible (car $e^x > 0$ pour tout réel x);
- si $\frac{1+y}{1-y} > 0$ soit $y \in]-1,1[$, l'équation équivaut à $x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

En définitive l'équation n'a pas de solution si $y \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ et une unique solution $\left(x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right)$ si $y \in]-1,1[$. L'application φ est donc injective et pas surjective.

Si on prend $]-1,1[$ pour ensemble d'arrivée, φ est bijective (l'équation $y = \varphi(x)$ a une unique solution pour tout $y \in]-1,1[$) et sa bijection réciproque est l'application φ^{-1} de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

2. On a, pour tous réels x et y : $\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{1+\varphi(x)\varphi(y)} = \frac{\frac{e^x-1}{e^x+1}+\frac{e^y-1}{e^y+1}}{1+\frac{e^x-1}{e^x+1}\cdot\frac{e^y-1}{e^y+1}} = \frac{(e^x-1)(e^y+1)+(e^x+1)(e^y-1)}{(e^x+1)(e^y+1)+(e^x-1)(e^y-1)} = \frac{2\left(e^{x+y}-1\right)}{e^{x+y}+e^x+e^y+1+e^{x+y}-e^x-e^y+1} = \frac{e^{x+y}-1}{e^{x+y}+1}$ soit $\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{1+\varphi(x)\varphi(y)} = \varphi(x+y)$.

3. Soient x' et y' de l'intervalle $]-1,1[$. Comme φ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ il existe x et y dans $\mathbb{R}$ tels que $x' = \varphi(x)$ et $y' = \varphi(y)$ donc $\frac{x'+y'}{1+x'y'} = \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{1+\varphi(x)\varphi(y)} = \varphi(x+y)$ (d'après 2/) et $\varphi(x+y) \in]-1,1[$ (car φ est une application de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.

Avec les notations précédentes on a alors : $\varphi^{-1}\left(\frac{x'+y'}{1+x'y'}\right) = \varphi^{-1}(\varphi(x+y)) = x+y$. Or $x' = \varphi(x)$ et $y' = \varphi(y)$ donc $x = \varphi^{-1}(x')$ et $y = \varphi^{-1}(y')$ d'où $\boxed{\varphi^{-1}\left(\frac{x'+y'}{1+x'y'}\right) = \varphi^{-1}(x') + \varphi^{-1}(y')}$.

4. Pour tous réels x et y on a $h(x+y) = \varphi^{-1}(g(x+y)) = \varphi^{-1}\left(\frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}\right)$ (d'après (*)), et d'après la question précédente : $\varphi^{-1}\left(\frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}\right) = \varphi^{-1}(g(x)) + \varphi^{-1}(g(y)) = h(x) + h(y)$ donc :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, h(x+y) = h(x) + h(y).$$

D'après le rappel du début il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = ax$ pour tout réel x.

D'autre part on a $h = \varphi^{-1} \circ g \Longleftrightarrow g = \varphi \circ h$ (en composant par φ à gauche dans les deux membres). On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \varphi(h(x)) = \varphi(ax) = \frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}$.

Réciproquement l'application $\varphi_a : x \longmapsto \frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}$ est la composée de $x \longmapsto ax$ suivie de φ donc est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ comme composée de deux bijections (si $a \neq 0$) et pour tous réels x et y on a $\varphi_a(x+y) = \varphi(ax+ay) = \frac{\varphi(ax)+\varphi(ay)}{1+\varphi(ax)\varphi(ay)} = \frac{\varphi_a(x)+\varphi_a(y)}{1+\varphi_a(x)\varphi_a(y)}$ donc φ_a vérifie (*).

En définitive l'ensemble des fonctions g continues de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ vérifiant **(*)** est :

$$\left\{x \longmapsto \frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1} / a \in \mathbb{R}^*\right\}.$$