$\boxed{\textbf{EF4}}$ L'objet du problème est de résoudre le problème (*) suivant : trouver les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

(i) f est continue en 0 et

(ii) $\forall x \in \left]-1,1\right[, f\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right) = (1-x^2)\, f(x)$.

Etude d'une solution particulière

Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\arctan x}{x}$ et $g(0) = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

1. Montrer qu'il existe une unique valeur de α telle que g soit continue en 0.

2. Le réel α ayant la valeur trouvée précédemment, montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $\arctan x > \frac{x}{1+x^2}$.
Dresser le tableau de variation et tracer le graphique de la fonction g.

4. Montrer que g est solution du problème (*) ssi

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, 2\arctan x = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right). \tag{1}$$

5. Démonter la relation (1) de deux façons :

a/ en composant les deux membres par la fonction tangente;

b/ en dérivant la fonction $\varphi : x \longmapsto \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

La fonction g est donc solution du problème (*).

Ensemble des solution de (*)

On procède par analyse-synthèse : on suppose que f est solution du problème.
Soit F la fontion définie par :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, F(x) = f(\tan x).$$

6. Montrer que : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[,\ F(2x) = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} F(x)$.
En déduire par récurrence sur n que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \forall n \in \mathbb{N}^*, F(x) = F\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \frac{\cos x}{\cos^2 \frac{x}{2^{n+1}}} \times \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k}}.$$

On admet la formule (que l'on pourrait démontrer par récurrence) :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k}} = \frac{2^n}{\sin x} \times \sin\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

7. Pour x fixé dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, trouver un équivalent, quand n tend vers l'infini, de $\frac{2^n}{\sin x} \times \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

8. Déduire des questions précédentes que : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[- \{0\}, F(x) = F(0) \times \frac{x}{\tan x}$, puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = f(0)\frac{\arctan x}{x}.$$

9. Trouver toutes les solutions du problème (*).

<u>*Correction*</u> : **1.** Au voisinage de 0 on a $g(x) \sim \frac{x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$. g sera continue en 0 ssi $\boxed{\alpha = 1}$.

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

Pour étudier la dérivabilité de g on 0 on considère son taux de variation en 0 ; $\tau_x = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{\arctan x - x}{x^2}$. Or $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$ donc $\tau_x = -\frac{x}{3} + o\left(x\right)$ et $\tau_x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. La fonction g est donc dérivable en 0 et $g'\left(0\right) = 0$.

3. On applique le théorème des accroissement fini à la fonction arctan sur l'intervalle $[0, x]$ (arctan étant dérivable sur cet intervalle) : $\exists c \in \left]0, x\right[/ \frac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x} = \frac{1}{1+c^2}$. D'autre part on a : $0 < c < x \Longrightarrow 1 + c^2 < 1 + x^2 \Longrightarrow \frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+x^2}$. On a donc :$\frac{\arctan(x)}{x} > \frac{1}{1+x^2}$ soit $\arctan x > \frac{x}{1+x^2}$ pour $x > 0$.

Pour $x \neq 0$ on a : $g'\left(x\right) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan x}{x^2} < 0$ d'après l'inégalité précédente. g est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et croissante sur $\mathbb{R}_-$ car g est paire.

4. g est solution du problème (*) ssi : $\forall x \in \left]-1, 1\right[, \dfrac{\arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)}{\dfrac{2x}{1-x^2}} = \left(1 - x^2\right)\frac{\arctan x}{x}$, ce qui équivaut à : $\forall x \in \left]-1, 1\right[, 2\arctan x = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

5. a/ Pour $x \in \left]-1, 1\right[$ on a $-\frac{\pi}{4} < \arctan x < \frac{\pi}{4}$ donc $-\frac{\pi}{2} < 2\arctan x < \frac{\pi}{2}$ et aussi $-\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) < \frac{\pi}{2}$. La fonction tan étant une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ la relation (1) est équivalente à : $\tan\left(2\arctan x\right) = \tan\left(\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\right)$, soit $\tan\left(2\arctan x\right) = \frac{2x}{1-x^2}$ (car $\forall y \in \mathbb{R}, \tan\left(\arctan y\right) = y$). Or $\tan\left(2\arctan x\right) = \frac{2\tan(\arctan x)}{1-\tan^2(\arctan x)} = \frac{2x}{1-x^2}$ ce qui prouve (1).

b/ la fonction φ est dérivable sur $\left]-1, 1\right[$ comme composée de fonctions dérivables et sur cet intervalle, $\varphi'\left(x\right) = \frac{\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)'}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} = \frac{\frac{2\left(1-x^2\right)+2x(2x)}{\left(1-x^2\right)^2}}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} = \frac{2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2+4x^2}$, soit $\varphi'\left(x\right) = \frac{2\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2}{1+x^2}$.

La fonction φ et $2\arctan x$ ont même dérivée sur l'intervalle $\left]-1, 1\right[$ donc elle diffèrent d'une constante : $\exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in \left]-1, 1\right[, \varphi\left(x\right) = 2\arctan x + C$. Pour $x = 0$ on obtient : $0 = 0 + C$ d'où $C = 0$ donc : $\forall x \in \left]-1, 1\right[, \varphi\left(x\right) = 2\arctan x$.

6. Pout tout x de $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ on a $F\left(2x\right) = f\left(\tan 2x\right) = f\left(\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right) = \left(1 - \tan^2 x\right) f\left(\tan x\right)$, car f est solution du problème (*). Or $1 - \tan^2 x = 1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$. Donc $\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[,\ F\left(2x\right) = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} F\left(x\right)\ (2)}$.

Soit P_n la propriété : "$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, F\left(x\right) = F\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\frac{\cos x}{\cos^2 \frac{x}{2^{n+1}}} \times \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k}}$".

On a $P_1 : \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, F\left(x\right) = F\left(\frac{x}{2^2}\right)\frac{\cos x}{\cos^2 \frac{x}{2^2}} \times \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}$.

Or, d'après (2) on a $F\left(x\right) = \frac{\cos x}{\cos^2(x/2)} F\left(\frac{x}{2}\right)$ (en remplaçant x par $x/2$) et de même $F\left(x/2\right) = \frac{\cos(x/2)}{\cos^2(x/4)} F\left(\frac{x}{4}\right)$, soit $F\left(x\right) = \frac{\cos x}{\cos^2(x/2)}\frac{\cos(x/2)}{\cos^2(x/4)} F\left(\frac{x}{4}\right) = F\left(\frac{x}{2^2}\right)\frac{\cos x}{\cos^2 \frac{x}{2^2}} \times \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}$ donc P_1 est vraie.

Si P_n est vraie pour un n donné on a $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, F\left(x\right) = F\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\frac{\cos x}{\cos^2 \frac{x}{2^{n+1}}} \times \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k}}$.

En remplaçant x par $x/2$: $F\left(x/2\right) = F\left(\frac{x}{2^{n+2}}\right)\frac{\cos(x/2)}{\cos^2 \frac{x}{2^{n+2}}} \times \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^{k+1}}}$. Or $F\left(x\right) = \frac{\cos x}{\cos^2(x/2)} F\left(\frac{x}{2}\right)$, d'où : $F\left(x\right) = \frac{\cos x}{\cos^2(x/2)} F\left(\frac{x}{2^{n+2}}\right)\frac{\cos(x/2)}{\cos^2 \frac{x}{2^{n+2}}} \times \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^{k+1}}} = F\left(\frac{x}{2^{n+2}}\right)\frac{\cos x}{\cos^2 \frac{x}{2^{n+2}}} \times \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1} \cos\frac{x}{2^{k+1}}}$, qui est la propriété P_{n+1}. La propriété P_n est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Quand n tend vers l'infini on a $\frac{x}{2^n} \longrightarrow 0$ donc $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{x}{2^n}$, donc $\frac{2^n}{\sin x} \times \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{x}{\sin x}$.

8. D'après 8/ : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \forall n \in \mathbb{N}^*, F(x) = F\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \frac{\cos x}{\cos^2 \frac{x}{2^{n+1}}} \times \frac{2^n}{\sin x} \times \sin\left(\frac{x}{2^n}\right).$

Pour x fixé dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[- \{0\}$ on a, quand n tend vers l'infini : $F\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \longrightarrow F(0)$ (car F est continue en 0), $\frac{\cos x}{\cos^2 \frac{x}{2^{n+1}}} \longrightarrow \cos x$ et $\frac{2^n}{\sin x} \times \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \longrightarrow \frac{x}{\sin x}$. On a donc : $F(x) = F(0) \frac{x \cos x}{\sin x} = F(0) \frac{x}{\tan x}$.

On donc : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[-\{0\}, f(\tan x) = f(0) \frac{x}{\tan x}$. En posant $y = \tan x$, soit $x = \arctan y$ on obtient : $\forall y \in \mathbb{R}^*, f(y) = f(0) \frac{\arctan y}{y}$, ou : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = f(0) \frac{\arctan x}{x}}$.

9. Si f est solution de (*) on a $f(x) = k\frac{\arctan x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = k$ (car f est continue en 0), donc $f(x) = k\varphi(x)$ d'après les questions précédentes.

Réciproquement (*synthèse)* ces fonctions sont solution de (*) d'après 4/ et 5/.

Conclusion : les solutions de (*) sont les fonctions $x \longmapsto k\varphi(x)$ où k est un réel quelconque.