Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

Partie 1 : *étude de φ*

1. Etudier les variations de φ sur $\mathbb{R}$ et donner l'allure du graphique de φ.

2. Justifier que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

3. Préciser φ^{-1}, bijection réciproque de φ.

Partie 2 : *étude d'une première équation fonctionnelle*

Le but de cette partie est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x). \tag{1}$$

On suppose que f est une fonction solution de (1) (*analyse*).

4. Calculer $f(0)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite réelle (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$.

5. Montrer que (u_n) converge et exprimer sa limite.

6. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x$.

7. Quel est l'ensemble des fonctions vérifiant (1) ?

Partie 3 : *étude d'une deuxième équation fonctionnelle*

Le but de cette partie est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}. \tag{2}$$

8. Montrer que φ est solution du problème (2).

On considère f une fonction solution de (2).

9. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.

10. Montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, 2ab \leq a^2 + b^2.$$

En observant que $f(x) = \frac{2f(x/2)}{1+(f(x/2))^2}$ pour tout réel x, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1.$$

On suppose que f est solution de (2) et que $f(0) = 0$.

On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 1$. Soit la suite (w_n) définie par $w_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.

11. Trouver une relation de récurrence entre w_n et w_{n+1}. En déduire que (w_n) est constante.

12. En étudiant sa limite, faire apparaître une contradiction.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 1$.

On montrerait de même que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq -1$.

On définit la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \varphi^{-1}(f(x))$.

13. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(2x) = 2g(x)$.

Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions du problème (2) dans le cas où $f(0) = 0$.

Correction :