Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) f(y) . \tag{1}$$

1. Montrer que les fonctions $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \mathrm{ch} x$ appartiennent à $\mathcal{E}$.

2. Montrer que si $f \in \mathcal{E}$ alors la fonctions f_α définie par $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$ appartient à $\mathcal{E}$.

3. Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que :

3. a. $f(0)$ vaut 0 ou 1.

3. b. Si $f(0) = 0$ alors f est la fonction identiquement nulle.

3. c. Si $f(0) = 1$ alors f est une fonction paire.

Dans la suite on se propose de déterminer les fonctions de $\mathcal{E}$ qui sont deux fois dérivables. Soit f une telle fonction.

4. Etablir que pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ on a : $f"(x+y) + f"(x-y) = 2f(x) f"(y)$.

5. En déduire l'existence d'une constante réelle λ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f"(x) = \lambda f(x)$.

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y" + \mu y = 0$ en séparant les cas $\mu > 0, \mu < 0$ et $\mu = 0$.

7. Déterminer les éléments de $\mathcal{E}$ qui sont deux fois dérivables.

<u>*Correction*</u> :

1. Pour tous réels x et y on a : $\cos(x+y) + \cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y = 2\cos x \cos y$, donc $\cos \in \mathcal{E}$.

De même, en utilisant que $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}x\mathrm{sh}y$ et le fait que la fonction sh est impaire on montre que $\mathrm{sh} \in \mathcal{E}$.

2. Pour $f \in \mathcal{E}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f_\alpha(x+y) + f_\alpha(x-y) = f(\alpha x + \alpha y) + f(\alpha x - \alpha y) = 2f(\alpha x) f(\alpha y)$ (car $f \in \mathcal{E}$) donc $f_\alpha(x+y) + f_\alpha(x-y) = 2f_\alpha(x) f_\alpha(y)$ et on a $f_\alpha \in \mathcal{E}$.

3. a. En prenant $x = y = 0$ dans la relation (1) on obtient : $2f(0) = 2(f(0))^2$ soit $f(0)(f(0)-1) = 0$ donc $\boxed{f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = 1}$.

3. b. Si $f(0) = 0$ en prenant $y = 0$ dans la relation (1) on obtient, pour tout réel x : $2f(x) = 2f(x) f(0)$, soit $f(x) = 0$ donc f est la fonction nulle.

3. c. Si $f(0) = 1$ en prenant $x = 0$ dans la relation (1) on obtient pour tout réel y : $f(y) + f(-y) = 2f(1) f(y)$, soit $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, ou $f(-y) = f(y)$ donc la fonction f est paire.

4. Dans (1) on fixe x et on dérive les deux membres par rapport à y (les fonction $y \longmapsto f(x+y)$ et $y \longmapsto f(x-y)$ étant dérivables comme composée de fonctions dérivables) et on obtient :

$$f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x) f'(y),$$

(la dérivée de $y \longmapsto f(x-y)$ étant égale à $y \longmapsto -f'(x-y)$) et en redérivant par rapport à y : $f"(x+y) + f"(x-y) = 2f(x) f"(y)$.

5. En posant $y = 0$ on a : $\forall x \in \mathbb{R}, 2f"(x) = 2f(x) f"(0)$ ou $f"(x) = f(x) f"(0)$. En posant $\lambda = f"(0)$ on en déduit que f est solution de l'équation différentielle $f"(x) = \lambda f(x)$.

6. L'équation caractéristique de $y" + \mu y = 0$ est $r^2 + \mu = 0$. Si $\mu > 0$ cette équation a pour solution $r = \pm i\sqrt{\mu}$ donc les solutions de $y" + \mu y = 0$ sont $y(x) = A\cos\left(\sqrt{\mu}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\mu}x\right)$ (A et B constantes réelles arbtitraires). Si $\mu < 0$ cette équation a pour solution $r = \pm\sqrt{|\mu|}$ donc les solutions de $y" + \mu y = 0$ sont $y(x) = Ae^{\sqrt{|\mu|}x} + Be^{-\sqrt{|\mu|}x}$.

Si $\mu = 0$ l'équation différentielle s'écrit $y" = 0$ donc les solutions sont $y(x) = Ax + B$.

7. Si la fonction y définie par $y(x) = Ax + B$ appartient à $\mathcal{E}$ on a $y(0) = B = 0$ ou 1 d'après 3/ a/.

Si $y(0) = B = 0$ y est la fonctin nulle d'après 3/ b/ (i.e. $A = B = 0$). Si $y(0) = B = 1$ alors y est la fonction constante égale à 1 qui appartient bien à $\mathcal{E}$.

De même si $y(x) = A\cos\left(\sqrt{\mu}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\mu}x\right)$ appartient à $\mathcal{E}$ on a $y(0) = A = 0$ ou 1 . Si $y(0) = A = 0$ alors y est la fonction nulle (donc $A = B = 0$). Si $A = 1$ alors y est paire donc $B = 0$. On obtient obtient dans ce cas la foncion nulle et la fonction $x \longmapsto \cos\left(\sqrt{\mu}x\right)$ qui appartiennent bien à $\mathcal{E}$ d'après 1/ et 2/.

Si $y(x) = Ae^{\sqrt{|\mu|}x} + Be^{-\sqrt{|\mu|}x}$, en écrivant $e^{\pm\sqrt{|\mu|}x} = \operatorname{ch}\left(\sqrt{|\mu|}x\right) \pm \operatorname{sh}\left(\sqrt{|\mu|}x\right)$ on peut écrire $y(x) = C\operatorname{ch}\left(\sqrt{|\mu|}x\right) + D\operatorname{sh}\left(\sqrt{|\mu|}x\right)$. Le même raisonnement que précédemment montre que y est la fonction nulle ou alors $y(x) = \operatorname{ch}\left(\sqrt{|\mu|}x\right)$ qui appartiennent bien à $\mathcal{E}$ d'après 1/ et 2/.

En définitive les éléments de $\mathcal{E}$ qui sont deux fois dérivables sont : la fonction nulle, la fonction constante égale à 1, et les fonctions $x \longmapsto \cos(\alpha x)$, $x \longmapsto \operatorname{ch}(\alpha x)$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$.