Le réel k étant donné soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(x) + kxy \quad (*)$;

(ii) f admet une limite finie en 0.

1. Calculer $f(0)$. Montrer que f est continue en 0.

2. Soit x_0 un réel donné. Calculer $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)$. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Soit x un réel. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$f(nx) = nf(x) + \frac{n(n-1)}{2}kx^2.$$

On pose $f(1) = a$. Calculer $f(n)$ en fonction de k et de a pour $n \in \mathbb{Z}$.

4. Soit $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$f(x) = ax + k\frac{x(x-1)}{2}.$$

(*Indication* : on pourra calculer de deux façons $f\left(q.\frac{p}{q}\right)$).

6. En déduire que pour tout x réel on a : $f(x) = ax + k\frac{x(x-1)}{2}$.

Trouver toutes les fonctions vérifiant (i) et (ii).

Correction :

1. En remplaçant x et y par 0 dans (i) on obtient : $f(0) = f(0) + f(0)$, soit $f(0) = 0$.

En remplaçant x et y par h : $f(h+h) = 2f(h) + kh^2$. Posons $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = l \in \mathbb{R}$. En passant à la limite dans l'égalité précédente on obtient : $l = 2l$ soit $l = 0$.

On a donc $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.

2. D'après (i) : $f(x_0+h) = f(x_0) + f(h) + kx_0h$. Comme $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = 0$ on a, en passant à la limite quand h tend vers 0 : $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ c'est à dire que f est continue en x_0.

3. Soit $P(n)$ la propriété "$f(nx) = nf(x) + \frac{n(n-1)}{2}kx^2$".

$P(0)$:"$f(0) = 0$" qui est vraie.

Supposons $P(n)$ vraie pour un entier naturel n fixé.

On a $f[(n+1)x] = f(nx+x) = f(nx) + f(x) + knx^2$ d'après (i).

Comme $P(n)$ est vraie on obtient : $f[(n+1)x] = nf(x) + \frac{n(n-1)}{2}kx^2 + f(x) + knx^2$, soit $f[(n+1)x] = (n+1)f(x) + kx^2\left(\frac{n(n-1)}{2} + n\right) = (n+1)f(x) + kx^2\frac{n(n+1)}{2}$ donc la propriété $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Pour $x = 1$ il vient, pour tout entier naturel n, $f(n) = na + k\frac{n(n-1)}{2}$.

D'autre part, en prenant $x = 1$ et $y = -1$ dans (*) il vient : $f(0) = f(1) + f(-1) - k$ soit $f(-1) = -a + k$.

Si $n \in \mathbb{N}$ on a, en prenant $x = -1$ dans la relation démontrée précedemment : $f(-n) = nf(-1) + \frac{n(n-1)}{2}k$, soit $f(-n) = n(-a+k) + \frac{n(n-1)}{2}k = -na + k\left(\frac{n(n-1)}{2} + n\right) = -na + k\frac{n(n+1)}{2}$, soit $f(-n) = -na + k\frac{(-n)(-n-1)}{2}$ et finalement on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = na + k\frac{n(n-1)}{2}}$.

4. On a d'une part : $f\left(q.\frac{p}{q}\right) = f(p) = pa + k\frac{p(p-1)}{2}$ d'après la question précédente.

D'autre part on a, d'après la question 3/ (avec $n = q$ et $x = \frac{p}{q}$) : $f\left(q.\frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{q(q-1)}{2}k\left(\frac{p}{q}\right)^2$.

Il en résulte que : $pa + k\frac{p(p-1)}{2} = qf\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{q(q-1)}{2}k\left(\frac{p}{q}\right)^2$, soit $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}a + k\frac{p(p-1)}{2q} - \frac{(q-1)}{2}k\left(\frac{p}{q}\right)^2 = a\frac{p}{q} + k\frac{p}{2q}\left((p-1) - (q-1)\frac{p}{q}\right)$ ce qui donne $f\left(\frac{p}{q}\right) = a\frac{p}{q} + k\frac{p}{2q}\left(\frac{p}{q} - 1\right)$. On a donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = ax + k\frac{x(x-1)}{2}}$.

5. Soit x un réel quelconque. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ il existe une suite de rationnels (r_n) qui converge vers x. D'après la question précédente on a : $\forall n \in \mathbb{N}, f(r_n) = ar_n + k\frac{r_n(r_n-1)}{2}$.

La fonction f étant continue en x on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = f(x)$ et en faisont tendre n vers l'infini dans l'égalité précédente : $f(x) = ax + k\frac{x(x-1)}{2}$.

Réciproquement la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = ax + k\frac{x(x-1)}{2}$ vérifie (i) et (ii).

Conclusion : l'ensemble des fonctions vérifiant les conditions (i) et (ii) est

$$E = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ t.q } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + k\frac{x(x-1)}{2} \right\}.$$