Exercices Equations Fonctionnelles

$\boxed{1}$ On cherche les applications f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout réel x :

$$f\left(\frac{x}{2}+1\right)=f(x) \ \ (*).$$

1.a. Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel n non nul on a :

$$f\left(\frac{x}{2^n}+2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=f(x)\,.$$

b. En déduire que f est constante.

Quelles sont toutes les applications f continues vérifiant (*) ?

Plus généralement soient a et b deux réels donnés, avec $a \neq 1$. Le but du problème est de trouver l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(x)=f(ax+b)\,. \tag{1}$$

On procède par analyse-synthèse : soit donc f vérifiant (1) (analyse).

2. Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel n non nul on a :

$$f(x)=f\left[a^n x+b\left(1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}\right)\right].$$

En déduire l'ensemble des fonctions vérifiant (1) dans le cas où $|a|<1$.

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=f\left(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}\right)$.

En déduire l'ensemble des fonctions vérifiant (1) dans le cas où $|a|>1$.

$\boxed{2}$ **1.** Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x tel que $\frac{x}{2^n} \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ on a :

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

Dans la suite on cherche l'ensemble (E) des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f \text{ continue en } 0 \text{ et : } \forall x \in \mathbb{R}, f(2x)=f(x)\cos x. \tag{2}$$

On procède par analyse-synthèse : soit donc f vérifiant (1) (analyse).

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

3. Pour x réel fixé tel que $\frac{x}{2^n} \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, donner un équivalent de la suite $\frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$ (quand n tend vers l'infini).

4. Déduire de ce qui précède l'ensemble (E) des fonctions vérifiant (1).

$\boxed{3}$ On veut trouver l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right). \tag{3}$$

On raisonne par analyse-synthèse : soit donc f vérifiant (1) (*analyse*).

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f"(x) = 0.$$

2. En déduire l'ensemble des fonctions vérifiant (1).

$\boxed{4}$ Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble (E) des fonctions, *différentes de la fonction nulle*, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) f'(y) + f'(x) f(y) \quad \textbf{(*)}$$

1. Donner un élément de (E).

On raisonne par analyse-synthèse : soit donc f un élément de (E) et a un réel tel que $f(a) \neq 0$.

2. Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = \dfrac{f(x+a) - f(x) f'(a)}{f(a)}$. En déduire que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que $f(0) = 0$ ou $f'(0) = \frac{1}{2}$.

4. Dans cette question on suppose $f'(0) = \frac{1}{2}$.

a. Montrer que $f(0) \neq 0$.

b. On pose $\lambda = \dfrac{1}{2f(0)}$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$y' - \lambda y = 0.$$

c. Déterminer tous les éléments de (E) dans ce cas.

5. Dans cette question on suppose $f(0) = 0$.

a. Montrer que $f'(0) = 1$.

b. Prouver que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f"(x) f(y) = f"(y) f(x)$.

Indication : dériver **(*)** par rapport à x puis par rapport à y.

c. On pose $\lambda = \dfrac{f"(a)}{f(a)}$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$y" - \lambda y = 0.$$

d. Déterminer tous les éléments de (E) dans le cas où $\lambda = 0$.

<u>*Correction*</u> :

$\boxed{1}$ **a.** Pour x réel fixé soit la propriété P_n : "$f\left(\frac{x}{2^n} + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = f(x)$".

P_0 est vraie (elle s'écrit $f(x) = f(x)$).

Supposons P_n vraie pour un entier n fixé. En remplaçant x par $\frac{x}{2^n} + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ dans (*) on obtient : $f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2^n} + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + 1\right) = f\left(\frac{x}{2^n} + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = f(x)$ (hypothèse de récurrence pour la dernière égalité). Donc $f\left(\frac{x}{2^{n+1}} + 1 - \frac{1}{2^n} + 1\right) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}} + 2 - \frac{1}{2^n}\right) = f(x)$ donc la propriété P_{n+1} est vraie.

D'après le principe du raisonnement par récurrence la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.

b. Pour x fixé la suite $\frac{x}{2^n} + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ converge vers 2. Comme f est continue en 2 on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\frac{x}{2^n} + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = f(2)$. En passant l'égalité $f\left(\frac{x}{2^n} + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = f(x)$ à la limite quand n tend vers + on obtient $f(2) = f(x)$ donc f est constante.

Réciproquement ("synthèse") : toute fonction constante est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie (*).

Conclusion : les applications f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant (*) sont les applications constantes.

2. Soit la propriété P_n : "$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left[a^n x + b\left(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}\right)\right]$".

P_1 est vraie car $f(x) = f(ax + b)$, pour tout réel x.

Supposons la propriété P_n vraie pour un certain rang n fixé. Soit x un réel.

Posons $X = a^n x + b\left(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}\right)$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(X)$ (car P_n est vraie)$= f(aX + b)$, par hypothèse sur f, donc $f(x) = f\left[a\left(a^n x + b\left(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}\right)\right) + b\right]$, soit $f(x) = f\left(a^{n+1} x + b\left(1 + a + \ldots + a^n\right)\right)$, donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

On remarque d'autre part que $1 + a + \ldots + a^n$ est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison a, donc $1 + a + \ldots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(x) = f\left(a^n x + b\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}\right).$$

Quand n tend vers $+\infty$, on a $a^n \longrightarrow 0$ (car $|a| < 1$) donc $a^n x + b\frac{1-a^{n+1}}{1-a} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{b}{1-a}$. Comme la fonction f est continue en $\frac{b}{1-a}$ on a donc $f\left(a^n x + b\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f\left(\frac{b}{1-a}\right)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans les deux membres de $f(x) = f\left(a^n x + b\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)$ on obtient $f(x) = f\left(\frac{b}{1-a}\right)$. Donc f est constante.

Synthèse : les fonctions constantes vérifient évidemment (1).

Conclusion : l'ensemble des fonctions f vérifiant (1) est donc l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout réel x on a $f\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right) = f\left[a\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right) + b\right] = f(x - b + b)$, soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right) = f(x).$$

Si $|a| > 1$ on a $\left|\dfrac{1}{a}\right| < 1$ donc d'après 2/, f est constante.

Comme en 1/ on en déduit que les fonctions vérifiant (1) pour $|a| > 1$ sont aussi les fonctions constantes.

$\boxed{2}$ **1.** Récurrence sur n : soit P_n la propriété : "$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$".

Initialistion : on a P_1 : $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}$ ce qui résulte de la formule $\sin x = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$.

Hérédité : supposons que P_n soit vraie. Donc $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$. Comme $\sin 2x = 2\cos x \sin x$ on a $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$ d'où $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{2\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$, soit $\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$ donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété P_n est vraie.

2. Récurrence sur n : soit Q_n la propriété : "$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$".

Initialisation : on a Q_1 : $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ qui est vraie pour tout réel x (remplacer dans (1) x par $\frac{x}{2}$).

Hérédité : supposons que Q_n soit vraie. Donc $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ pour tout réel x. D'autre part, d'après (1), en remplaçant x par $\frac{x}{2^{n+1}}$: $f\left(2\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\frac{x}{2^{n+1}}$, soit $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\frac{x}{2^{n+1}}$, donc $f(x) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\frac{x}{2^{n+1}}\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ et donc Q_{n+1} est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété Q_n est vraie.

3. Pour x réel fixé, on a $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{x}{2^n}$ (car $\frac{x}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$) d'où $\frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}$.

4. D'après les questions 1/ et 2/ on a, pour x réel fixé non nul : $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$ (pour n assez grand afin que $\frac{x}{2^n} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[- \{0\}$). Quand n tend vers l'infini on a $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \longrightarrow f(0)$ (car $\frac{x}{2^n} \longrightarrow 0$ et f est continue en 0) et $\frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \longrightarrow \frac{\sin x}{x}$. Donc $f(x) = f(0)\frac{\sin x}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

On a donc f définie par : $f(x) = C\frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = C$ (où C est une constante réelle).

Synthèse : soit f définie par $f(x) = C\frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = C$. Comme $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ on a $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} C = f(0)$ donc f est continue en 0.

D'autre part pour tout réel x non nul on a $f(2x) = C\frac{\sin 2x}{2x} = C\frac{2\sin x\cos x}{2x} = C\frac{\sin x}{x}\cos x$, soit $f(2x) = f(x)\cos x$, et cette relation est vraie aussi si $x = 0$.

Conclusion : l'ensemble (E) est constitué des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = C\frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = C$ (C constante réelle quelconque).

$\boxed{3}$ **1.** La fonction $x \longmapsto f(-x)$ est dérivable dans $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables donc $x \longmapsto f(x) + f(-x)$ aussi, donc la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

En dérivant les deux membre de (1) on obtient : $f"(x) = \frac{1}{2}(f'(x) - f'(-x))$. Or $f'(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $f'(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x))$ (d'après (1)), donc $f"(x) = 0$ pour tout réel x.

On a donc : $f'(x) = a =$ constante puis $f(x) = ax + b$.

2. Il reste à faire la synthèse : posons $f(x) = ax + b$ pour tout réel x.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)= a$ et $\frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = \frac{1}{2}(ax + b - ax + b) = b$.

f vérifie (1) ssi $a = b$.

Conclusion : l'ensemble des fonctions vérifiant (1) est $\{x \longmapsto ax + a / a \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{4}$ **1.** L'application identité de $\mathbb{R}$: $x \mapsto x$ est élément de E.

2. En remplaçant y par a dans (*) on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + a) = f(x)f'(a) + f'(x)f(a)$, d'où $f'(x) = \dfrac{f(x+a) - f(x)f'(a)}{f(a)}$ (car $f(a) \neq 0$).

f' est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables, donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. En remplaçant x et y par 0 dans (*) on obtient : $f(0) = 2f(0)f'(0)$, soit $f(0)[1 - 2f'(0)] = 0$ d'où $\boxed{f(0) = 0 \text{ ou } f'(0) = \frac{1}{2}}$.

4. a. Supposons que $f(0) = 0$. En remplaçant y par 0 dans (*) on obtient, pour tout réel x : $f(x) = f(x) f'(0) + f'(x) f(0)$, et vu que $f'(0) = \frac{1}{2}$ et $f(0) = 0$ on a $2f(x) = 0$, ce qui contredit que f n'est pas la fonction nulle.

On a donc $\boxed{f(0) \neq 0}$.

b. Avec $y = 0$ dans (*) on obtient, pour tout réel x : $f(x) = f(x) f'(0) + f'(x) f(0)$ soit $f(x) = \frac{1}{2} f(x) + f'(x) f(0)$ ou $f(x) = 2f'(x) f(0)$. En divisant les deux membres par $f(0)$ ($\neq 0$) on obtient $\frac{f(x)}{2f(0)} = f'(x)$ soit $f'(x) - \lambda f(x) = 0$ i.e. f est solution de l'équation différentielle $\boxed{y' - \lambda y = 0}$.

c. Les solutions de cette équation différentielle sont $y(x) = Ce^{\lambda x}$ (C constante réelle), donc $f(x) = Ce^{\lambda x}$.

Il reste à faire la synthèse : posons $f(x) = Ce^{\lambda x}$ pour x réel avec C réel non nul. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et non nulle.

f vérifie (*) ssi, pour tous réels x et y : $Ce^{\lambda(x+y)} = Ce^{\lambda x}.C\lambda e^{\lambda y} + C\lambda e^{\lambda x}.Ce^{\lambda y}$, soit $Ce^{\lambda(x+y)} = 2C^2 \lambda e^{\lambda(x+y)}$. Comme $C \neq 0$, c'est équivalent à $1 = 2C\lambda$ soit $C = \frac{1}{2\lambda}$. On a donc $f(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{\lambda x}$ avec $C \neq 0$ et alors $f'(x) = \frac{1}{2} e^{\lambda x}$, donc on a bien $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Conclusion : dans le cas où $f'(0) = \frac{1}{2}$ l'ensemble (E) est l'ensemble des fonctions $x \mapsto \frac{1}{2\lambda} e^{\frac{x}{2}}$ avec $\lambda \neq 0$.

5. a. Dans la relation de la question 1/ on remplace x par 0 d'où $f'(0) = \dfrac{f(a) - f(0) f'(a)}{f(a)} = \dfrac{f(a)}{f(a)}$ (car $f(0) = 0$) soit $\boxed{f'(0) = 1}$.

b. On dérive (*) par rapport à x (y étant une constante) et on obtient :

$$f''(x+y) = f'(x) f'(y) + f''(x) f(y),$$

et de même, en dérivant (*) par rapport à y (x étant une constante)

$$f''(x+y) = f(x) f''(y) + f'(x) f'(y)$$

donc, pour tous réels x, y : $\boxed{f(x) f''(y) = f''(x) f(y)}$ $(= f''(x+y) - f'(x) f'(y))$.

c. On remplace y par a dans la relation précédente et on obtient pour tout réel x : $f(x) f''(a) = f''(x) f(a)$, soit $f''(x) - f(x) \frac{f''(a)}{f(a)} = 0$, i.e f est solution de l'équation différentielle $\boxed{y'' - \lambda y = 0}$ avec $\lambda = \frac{f''(a)}{f(a)}$.

d. Si $\lambda = 0$ les solutions de l'équation différentielle précédentes sont $y(x) = f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Faisons la synthèse : si on pose $f(x) = ax + b$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie (*) ssi :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) &\in \mathbb{R}^2, a(x+y) + b = (ax+b) a + a(ay+b) \\ \forall (x,y) &\in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow ax + ay + b = a^2 x + a^2 y + 2ab \end{aligned}$$

cela équivaut à $a = a^2$ et $b = 2ab$ soit $a(a-1) = 0$ et $b(2a-1) = 0$.

Si $a = 0$ la deuxième équation donne $b = 0$, cas exclu car f n'est pas la fonction nulle.

Sinon $a = 1$ et $b = 0$, et on obtient $f(x) = x$ pour tout x (on a bien $\lambda = 0$ car $f'' = 0$).

Conclusion : dans ce cas l'identité est la seule fonction vérifiant les conditions, i.e. $(E) = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$.