EV1 **Partie A : étude des endomorphismes u tels que $u \circ u = 0$**

Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme non nul tel que $u \circ u = 0$.
On note r le rang de u et k la dimension de $\ker u$.

1. Que peut-on dire du déterminant de u ? Que peut-on en déduire pour u ?

Montrer que $k \neq 0$ et $r \neq 0$.

2. Montrer que $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$.

Que peut-on en déduire pour r et k ?

3. Dans cette question on prend $n = 2$.

3.a. Montrer que $\text{Im}(u) = \ker(u)$.

3.b. Soit i un vecteur non nul appartenant à l'image de u et j un vecteur tel que $u(j) = i$.

Montrer que (i, j) est une base de E .

Donner la matrice de u dans cette base.

4. Dans cette question on prend $n = 3$.

4.a Montrer que $r = 1$ et $k = \dim \ker(u) = 2$.

4.b Soit e_3 un vecteur de E n'appartenant pas à $\ker(u)$ et $e_1 = u(e_3)$.

Expliquer pourquoi il existe un vecteur e_2 de $\ker(u)$ non colinéaire à e_1 .

Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E .

4.c Quelle est la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) ?

Partie B : application à un exemple

On note $\mathcal{M}(3, 3)$ l'ensemble des matrices de type $(3, 3)$ à coefficients réels et $GL(3, 3)$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}(3, 3)$.

On note I la matrice identité et J la matrice définie par :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit v l'endomorphisme canoniquement associé à J .

5. Montrer que $v \circ v = 0$.

6. Déterminer le noyau et l'image de v et en préciser leur dimension.

7. Trouver une base B de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de v est $J' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B .

Exprimer J' en fonction de P et J .

On considère Γ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}(3, 3)$ de la forme $\alpha I + mJ$ avec $(\alpha, m) \in \mathbb{R}^2$.

8. Montrer que Γ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(3, 3)$. Quelle est sa dimension ?

9. Calculer $(I + mJ)(I - mJ)$ et en déduire simplement que la matrice $I + mJ$ est inversible et préciser son inverse.

Retrouver que $I + mJ$ est inversible en calculant le déterminant de $I + mJ$.

10. Si $M = I + mJ$, calculer M^q pour tout entier naturel q .

Soit m un réel donné non nul et $M = I + mJ$.

Partie C : résolution d'une équation dans $\mathcal{M}(3, 3)$

On se propose dans la suite de trouver toutes les matrices X de $\mathcal{M}(3, 3)$ telles que $X^2 = M$ (1) où $M = I + mJ$ (m réel donné non nul).

11. Trouver les solutions de (1) de la forme $I + \beta J$.

12. Justifier l'égalité $P^{-1}MP = N$, avec $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (P est la matrice définie à la question 7/).

13. On pose $Y = P^{-1}XP$.

Montrer que l'équation (1) équivaut à : $Y^2 = N$ (2).

14. Soit Y solution de (2).

a. Montrer que $YN = NY$.

b. On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Calculer YN et NY et en déduire que Y est triangulaire supérieure et que $i = a$.

15. Résoudre l'équation (2). On montrera qu'il y a un infinité de solutions dont on donnera la forme.

16. Déduire de ce qui précède les solutions de (1) à l'aide de la matrice P .

Corrigé :

Partie A

1. Comme $u \circ u = 0$ on a : $\det(u \circ u) = \det(0)$, soit $(\det(u))^2 = 0$, donc $\det(u) = 0$.

On en déduit que u n'est pas bijective et comme u est un endomorphisme de E de dimension finie, u n'est ni injective ni surjective.

Comme u n'est pas injective on a $\ker u \neq \{0\}$ donc $k \geq 1$. Comme u n'est pas nulle on a $\text{Im}(u) \neq \{0\}$, donc $r = \dim(\text{Im}(u)) \neq 0$.

2. Soit $y \in \text{Im}(u)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On a alors $u(y) = u^2(x) = 0_E$ (car $u^2 = O_{L(E)}$), donc $y \in \ker(u)$.

Conclusion : $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$.

Il en résulte que $\dim(\text{Im}(u)) \leq \dim(\ker(u))$ soit $\boxed{r \leq k}$.

3.a. Comme $n = 2$, d'après les questions précédentes on a $1 \leq r \leq 1 \leq p \leq 1$, donc $r = p = 1$.

Comme $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$ et $\dim(\text{Im}(u)) = \dim(\ker(u))$ on a donc $\boxed{\text{Im}(u) = \ker(u)}$.

3.b. Comme i appartient à l'image de u il existe bien un vecteur j tel que $u(j) = i$.

Montrons que le système (i, j) est libre. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha i + \beta j = 0$. En prenant l'image des deux membres par u il vient : $\beta u(j) = 0$ (car $u(i) = u^2(j) = 0$), donc $\beta = 0$ (car $u(j) \neq 0$). On a donc $\alpha i = 0$ d'où $\alpha = 0$. Le système (i, j) est donc libre et comme $\text{card}(i, j) = 2 = \dim E$, (i, j) est une base de E .

On a $u(i) = 0$ et $u(j) = 1$ donc la matrice de u dans la base (i, j) est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.a D'après les question 1/ et 2/ on a $1 \leq r \leq k$ et d'après le théorème du rang : $r + k = 3$, donc $r = 1$ et $k = 2$.

4.b Comme $k = \dim \ker(u) = 2$ il existe un vecteur e_2 de $\ker(u)$ non colinéaire à e_1 .

On remarque que $e_1 \in \ker(u)$ car $u(e_1) = u^2(e_3) = 0$.

Comme $\dim E = 3$, pour montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E il suffit de montrer que ce système est libre.

Si $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$, on a, en prenant l'image des deux membres par u : $\gamma u(e_3) = 0$ (car e_1 et $e_2 \in \ker(u)$), donc $\gamma = 0$ (car $u(e_3) \neq 0$).

Il reste : $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$ car e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires.

Conclusion : (e_1, e_2, e_3) est une base de E .

4.c On a $u(e_1) = u(e_2) = 0$ et $u(e_3) = e_1$ donc la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie B

5. Un calcul facile donne $J^2 = 0$ donc $v \circ v = 0$.

6. Un vecteur X de coordonnées (x, y, z) appartient à $\ker v$ ssi
$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$
 ce

qui équivaut à $x - y - z = 0$. En prenant pour paramètres $y = t$ et $z = t'$ on obtient les $X(t + t', t, t')$. Comme $(t + t', t, t') = t(1, 1, 0) + t'(1, 0, 1)$, $\ker v$ est le plan vectoriel de base $(u(1, 1, 0), v(1, 0, 1))$.

Les trois colonnes de J étant colinéaires à la première, J est de rang 1. $\text{Im } v$ est donc la droite vectorielle engendrée par $w(1, 2, -1)$.

7. On prend par exemple $e_3(0, 0, 1)$ qui n'appartient pas $\ker v$ et $e_1 = v(e_3)$ a pour coordonnées $(1, 2, -1)$ (dernière colonne de J). On prend $e_2 = u$ (non colinéaire à e_1). D'après 4/ la matrice de v dans la base (e_1, e_2, e_3) a la forme voulue.

La matrice de passage de la base canonique à la base B est : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on a :

$$J' = P^{-1}JP.$$

8. Γ est le sous-espace vectoriel de $M(3, 3)$ engendré par I et J .

Le système (I, J) est libre (car pour λ et μ réels on a $\lambda I + \mu J = 0 \implies \lambda = \mu = 0$) donc c'est une base de Γ , d'où $\boxed{\dim \Gamma = 2}$.

9. Comme précédemment $(I + mJ)(I - mJ) = I$, donc la matrice $I + mJ$ est inversible à droite, donc aussi à gauche (cours !), et son inverse est $I - mJ$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \det(I + mJ) &= \begin{vmatrix} 1 - m & m & m \\ -2m & 1 + 2m & 2m \\ m & -m & 1 - m \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 1 + 2m & 2m \\ 0 & -m & 1 - m \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 0 & 1 + m & m \\ 0 & -m & 1 - m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + m & m \\ -m & 1 - m \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ donc } I + mJ \text{ est inversible.} \end{aligned}$$

10. D'après la formule du binôme de Newton (applicable car I et mJ commutent) on a, pour tout entier naturel q : $M^q = (I + mJ)^q = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} I^{q-k} (mJ)^k = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} m^k J^k$. Comme $J^2 = 0$ on a $J^k = 0$ pour $k \geq 2$ donc $\boxed{M^q = I + qmJ}$.

Partie C

11. $I + \beta J$ est solutions de **(1)** ssi $(I + \beta J)^2 = I + mJ$ ssi $I + 2\beta J = I + mJ$ ssi $2\beta = m$, soit $\beta = \frac{m}{2}$ et $X = I + \frac{m}{2}J$.

12. On a $P^{-1}MP = P^{-1}(I + mJ)P = P^{-1}IP + mP^{-1}JP = I + mJ'$, avec $J' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(question 7/), donc $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13. Comme $Y = P^{-1}XP$ on a : $X = PYP^{-1}$ (en composant à gauche par P et à droite par P^{-1}). De même on a $P^{-1}MP = N$ donc $M = PNP^{-1}$.

On a alors : $X^2 = M \iff (PYP^{-1})^2 = PNP^{-1} \iff PY^2P^{-1} = PNP^{-1}$. En composant à gauche par P^{-1} et à droite par P cette équation équivaut à : $Y^2 = N$ **(2)**.

14. a. On a $N = Y^2$ donc $YN = YY^2 = Y^3$ et de même $NY = Y^2Y = Y^3$, donc $YN = NY$.

b. D'autre part on trouve : $YN = \begin{pmatrix} a & b & am + c \\ d & e & dm + f \\ g & h & mg + i \end{pmatrix}$ et $NY = \begin{pmatrix} a + mg & b + mh & c + mi \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

On a alors : $YN = NY \iff \{a + mg = a, b + mh = b, c + mi = am + c, dm + f = f, mg + i = i\}$.

Comme $m \neq 0$ ce système équivaut à $g = h = d = 0$ et $i = a$.

Donc $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

15. D'après la question précédente on cherche les solutions de **(2)** sous la forme $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. On a : $Y^2 = N \iff \begin{pmatrix} a^2 & b(a+e) & 2ac + bf \\ 0 & e^2 & f(a+e) \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui équivaut au système : $a = \pm 1, e = \pm 1, b(a+e) = f(a+e) = 0, 2ac + bf = m$.

Si a et e ont même signe on a $a+e \neq 0$ donc on obtient $b = f = 0$ et $c = m/2a$. On obtient les solutions : $Y = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & m/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si a et e sont de signe contraire on a $a+e = 0$ donc b et f sont quelconques et $c = (m - bf)/(2a)$. On obtient les solutions : $Y = \begin{pmatrix} 1 & b & (m - bf)/2 \\ 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $Y = \begin{pmatrix} -1 & b & -(m - bf)/2 \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

16. D'après ce qui précède les solutions de **(1)** sont donc $X = PYP^{-1}$, où Y est solution de **(2)**.