Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $f \in \mathcal{E}$ on définit la fonction F par : $F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$.

1. Justifier que F existe et qu'elle appartient à $\mathcal{E}$.

On note Φ l'application qui à $f \in \mathcal{E}$ associe l'application $\Phi(f) = F$ définie précédemment.

2. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

3. Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $f \in \mathcal{E}$.

Des trois notations $(\Phi(f))(x)$, $\Phi(f(x))$, $\Phi(f)(x)$ lesquelles ont un sens ?

4. Soit $f \in \mathcal{E}$. Combien vaut $(\Phi(f))(0)$?

Φ est-il surjectif ?

5. Montrer que Φ est injectif.

6. Soit $g \in \mathcal{E}$ vérifiant $g(0) = 0$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{E}$ unique tel que $\Phi(f) = g$.

Expliciter f en fonction de g. Préciser $\operatorname{Im}\Phi$.

On rappelle qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ s'il existe un réel M tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq M.$$

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{E}$ bornées.

7. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par Φ (c'est à dire : si $f \in \mathcal{B}$ alors $\Phi(f) \in \mathcal{B}$).

Pour $f \in \mathcal{E}$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $(\Psi(f))(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$ $(= e^x \times \Phi(f)(x))$.

Il est clair que Ψ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ (on ne demande pas de le démontrer).

8. Soient $f_1 : x \longmapsto x - 1$ et $f_2 : x \longmapsto x^2 + 3x - 5$ éléments de $\mathcal{E}$.
Vérifier que $\Psi(f_1)$ et $\Psi(f_2)$ sont des polynômes.

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions polynômes P tels que $\Psi(P)$ soit un polynôme.

9. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ soit e_n la fonction définie par $e_n(x) = x^n$. On pose $J_n(x) = \Psi(e_n)$.

10. Au moyen d'une intégration par parties trouver une relation de récurrence entre $J_{n+1}(x)$ et $J_n(x)$.

11. En déduire une expression de $n!e^x - J_n(x)$ au moyen d'une somme.

12. Montrer que $x \longmapsto x^n - n!$ appartient à $\mathcal{H}$ pour tout entier $n \geq 1$.

13. Montrer que la fonction $x \longmapsto e^x$ n'est pas une fonction polynôme.

Quelle est la dimension de $\mathcal{H} \cap \mathbb{R}_n[X]$?

Préciser une base.

Correction :

1. L'application $t \longmapsto e^{-t} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[0, x]$ pour $x \geq 0$ donc l'intégrale $F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$.

De plus F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+, F'(x) = e^{-x} f(x)$. Comme f est C^{∞} sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que $x \longmapsto e^{-x}$ la fonction F' est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}_+$ donc F aussi.

2. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(f, g) \in \mathcal{E}$ et tout réel x on a : $\Phi(\alpha f + \beta g)(x) = \int_0^x e^{-t} (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dt = \alpha \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt + \beta \int_0^x e^{-t} g(t)\, dt$ (linéarité de l'intégrale), soit $\Phi(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha\Phi(f)(x) + \beta\Phi(g)(x)$ donc $\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g)$. Φ est donc linéaire.

De plus, d'après 1/, on a $\Phi(f) \in \mathcal{E}$ pour $f \in \mathcal{E}$ donc Φ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

3. $(\Phi(f))(x)$ a un sens : c'est l'image de x par l'application $\Phi(f)$.

$\Phi(f(x))$ n'a pas de sens car $f(x)$ est un réel et non une fonction.

$\Phi(f)(x)$ n'a pas non plus de sens à priori sauf si on convient que c'est une écriture simplifiée de $(\Phi(f))(x)$.

4. On a $(\Phi(f))(0)=\int_0^0 e^{-t}f(t)\,dt=0$.

Si $g\in\mathcal{E}$ a un antécédent f par Φ on a $\Phi(f)=g$ donc $g(0)=0$. Par conséquent, si $g(0)\neq 0$ g n'a pas d'antécédent et Φ n'est par surjective.

5. On a $f\in\ker\Phi\iff\Phi(f)=0\iff\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \int_0^x e^{-t}f(t)\,dt=0$. En dérivant les deux membres il vient $e^{-x}f(x)=0$ soit : $\forall x\in\mathbb{R}_+, f(x)=0$, donc $f=0$. On a donc $\ker\Phi=\{0\}$ et Φ est injective.

6. *Analyse* : s'il existe $f\in\mathcal{E}$ tel que $\Phi(f)=g$ on a $\forall x\in\mathbb{R}_+,\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt=g(x)$. En dérivant les deux membres il vient $\forall x\in\mathbb{R}_+, e^{-x}f(x)=g'(x)$, soit $f(x)=e^xg'(x)$.

Synthèse : posons pour tout réel $x\in\mathbb{R}_+$, $f(x)=e^xg'(x)$. On a pour tout réel $x\in\mathbb{R}_+$, $\Phi(f)(x)=\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt=\int_0^x e^{-t}(e^tg'(t))\,dt=\int_0^x g'(t)\,dt=g(x)-g(0)=g(x)$ (car $g(0)=0$). Donc $\Phi(f)=g$.

En définitive l'application $f:x\longmapsto e^xg'(x)$ est l'unique application de $\mathcal{E}$ telle que $\Phi(f)=g$.

7. Soit $f\in\mathcal{B}$ et $M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}_+,|f(x)|\leq M$. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ on a $|\Phi(f)(x)|=\left|\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt\right|\leq\int_0^x e^{-t}|f(t)|\,dt\leq\int_0^x e^{-t}M dt$, soit $|\Phi(f)(x)|\leq M\left[-e^{-t}\right]_0^x=M(1-e^{-x})$. Comme $0\leq e^{-x}\leq 1$ pour $x\in\mathbb{R}_+$ on a $0\leq 1-e^{-x}\leq 1$, donc, pour tout réel $x\in\mathbb{R}_+$, $|\Phi(f)(x)|\leq M$. On a donc $\Phi(f)\in\mathcal{B}$.

Conclusion : $\mathcal{B}$ est stable par Φ.

8. Pour tout réel x positif ou nul on a : $\Psi(f_1)(x)=e^x\int_0^x e^{-t}(t-1)\,dt$. On intègre par parties en posant $u=t-1$ et $v'=e^{-t}$ soit $\Psi(f_1)(x)=e^x\left[-(t-1)e^{-t}\right]_0^x+e^x\int_0^x e^{-t}dt=-x$.

De même $\Psi(f_2)(x)=e^x\int_0^x e^{-t}(t^2+3t-5)\,dt=e^x\left[-(t^2+3t-5)e^{-t}\right]_0^x+e^x\int_0^x e^{-t}(2t+3)\,dt$. En intégrant cette dernière intégrale par parties on trouve $\Psi(f_2)(x)=-x^2-5x$.

9. La fonction nulle appartient à $\mathcal{H}$ car $\Psi(0)=0$ qui est une fonction polynôme.

Si $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(f,g)\in\mathcal{H}^2$ on a $\Psi(\alpha f+\beta g)=\alpha\Psi(f)+\beta\Psi(g)\in\mathbb{R}[X]$ (car $\Psi(f)$ et $\Psi(g)\in\mathbb{R}[X]$) donc $\alpha f+\beta g\in\mathcal{H}$. *Conclusion* : $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

10. Pour $x\in\mathbb{R}_+$ on intègre par parties $J_{n+1}(x)=e^x\int_0^x e^{-t}t^{n+1}dt$ en posant $u=t^{n+1}$ et $v'=e^{-t}$. On obtient $J_{n+1}(x)=e^x\left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^x+(n+1)J_n(x)$, soit $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+, J_{n+1}(x)=-x^{n+1}+(n+1)J_n(x)}$

11. On écrit :

$$\begin{array}{rcl} J_n(x) & = & -x^n+nJ_{n-1}(x)\\ J_{n-1}(x) & = & -x^{n-1}+(n-1)J_{n-2}(x)\\ & & \vdots\\ J_1(x) & = & -x+J_0(x)\,. \end{array}$$

On multiplie la deuxième ligne par n, la deuxième par $n(n-1)$, etc, la dernière par $n(n-1)\times\ldots\times 2$ et on ajoute membres à membres. On obtient :

$$J_n(x)=-\left(x^n+nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+\ldots+n!x\right)+n!J_0(x)\,.$$

Comme $J_0(x)=e^x-1$ on obtient $J_n(x)=-(x^n+nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+\ldots+n!x)+n!(-1+e^x)$, soit

$$n!e^x-J_n(x)=x^n+nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+\ldots+n!x+n!.$$

Remarque : on peut écrire : $n!e^x-J_n(x)=\frac{n!}{n!}x^n+\frac{n!}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{n!}{(n-2)!}x^{n-2}+\ldots+\frac{n!}{1!}x+\frac{n!}{0!}$, donc

$$n!e^x - J_n(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

12. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ et tout réel $x \geq 0$ on a $\Psi(e_n - n!) = \Psi(e_n) - n!\Psi(1) = J_n(x) - n!(e^x - 1) = J_n(x) - n!e^x + n! \in \mathbb{R}[X]$ d'après la question précédente, donc $e_n - n! \in \mathcal{H}$.

13. *1ère façon* : supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x = P(x)$. Si $P(x) = a_0 + \ldots + a_p x^p$ (avec $a_p \neq 0$) on a $P(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_p x^p$ ce qui est impossible car $e^x \underset{x \to +\infty}{=} o(x^p)$.

2ième façon : si P est de degré $\leq n$ alors $P^{(n)}(x) = 0$ pour tout réel x, ce qui est absurde car la dérivée n-ième de l'exponentielle n'est pas nulle.

Posons, pour tout entier naturel k, $\pi_k(x) = x^k - k!$.

On a $\pi_k \in \mathcal{H} \cap \mathbb{R}_n[X]$ pour $1 \leq k \leq n$ et le système $(\pi_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un système libre (car les π_k sont non nuls et de degrés deux à deux distincts) donc $\dim \mathcal{H} \cap \mathbb{R}_n[X] \geq n$.

Si $\dim \mathcal{H} \cap \mathbb{R}_n[X] = n + 1$, comme $\mathcal{H} \cap \mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$ on aurait $\mathcal{H} \cap \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_n[X]$.

Or $e_0 \notin \mathcal{H}$ (car $\Psi(1)(x) = e^x - 1$ qui n'est par un polynôme) donc finalement $\boxed{\dim \mathcal{H} \cap \mathbb{R}_n[X] = n}$.

Le système $(\pi_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $\mathcal{H} \cap \mathbb{R}_n[X]$ étant libre et ayant n éléments c'est donc une base de $\mathcal{H} \cap \mathbb{R}_n[X]$.