$\boxed{\textbf{EVE5}}$ Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E.

1. Montrer que : $f^3 = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f^2 \subset \ker f$ (f^3 désigne $f \circ f \circ f$).

Dans les questions 2/ à 5/ f désigne un endomorphisme de E tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

2. Expliquer pourquoi il existe un vecteur x_0 de E tel que $f^2(x_0) \neq 0_E$.

En déduire que f n'est ni injective ni surjective.

3. Montrer que le système $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre dans E et en déduire que c'est une base de E.

4. Montrer que $\ker(Id_E + f) = \{0_E\}$. En déduire que $Id_E + f$ est un isomorphisme de E.

5. Calculer $(Id_E + f) \circ (Id_E - f + f^2)$ et en déduire $(Id_E + f)^{-1}$ en fonction de Id_E et de f.

Etude de deux exemples

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et D l'application qui à $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associe $D(P) = P'$ (polynôme dérivé de P).

Il est clair que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (on ne demande pas de le vérifier).

6. Montrer que $D^3 = 0$ et $D^2 \neq 0$. Préciser le noyau et le rang de D.

7. Déduire des questions précédentes que l'application u qui à $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associe $u(P) = P + P'$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelle est l'antécédent du polynôme $X^2 + 1$ par u ?

8. *Application* : en utilisant la question précédente, résoudre l'équation différentielle

$$y" - y' + y = x^2 - 2x + 3.$$

Dans la suite on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{cases} u(e_1) = & -e_1 + e_2 + 3e_3 \\ u(e_2) = & 3e_1 - 8e_2 - 14e_3 \\ u(e_3) = & -2e_1 + 5e_2 + 9e_3 \end{cases},$$

où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

9. Justifier l'existence et l'unicité de u.

10. Trouver le rang de la famille de vecteurs $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -14 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

En déduire le rang de u et une base de $\operatorname{Im} u$. Quelle est la dimension du noyau de u ?

11. Ecrire les formules analytiques de u dans la base (e_1, e_2, e_3).

Trouver le noyau de u et en trouver une base. Retrouver le rang de u.

12. Définir u^2 $(= u \circ u)$ par ses formules analytiques puis indiquer les calculs qu'il faudrait effecture pour montrer que $u^3 = 0$ (on ne demande pas ces calculs et on admettra que $u^3 = 0$).

13. On pose $v = Id_E + u$. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $v^n = (Id_E + u)^n = Id_E + nu + \frac{n(n-1)}{2}u^2$.

Corrigé :

1. *Condition nécessaire* : supposons que $f^3 = 0$. Soit $y \in \operatorname{Im} f^2$: il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$ On a alors $f(y) = f^3(x) = 0$ (car $f^3 = 0$) donc $y \in \ker f$. On a donc $\operatorname{Im} f^2 \subset \ker f$.

Condition nécessaire : supposons $\operatorname{Im} f^2 \subset \ker f$. Pour $x \in E$ on a $f^3(x) = f(f^2(x)) = 0$ car $f^2(x) \in \operatorname{Im} f^2$ donc $f^2(x) \in \ker f$ par hypothèse. On a donc $f^3 = 0$.

Conclusion : $f^3 = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f^2 \subset \ker f$

2. Comme $f^2 \neq 0$, f^2 n'est pas l'endomorphisme nul, donc $\forall x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0$.

De plus $f\left(f^2(x_0)\right) = f^3(x_0) = 0$ (car $f^3 = 0$) donc $f^2(x_0) \in \ker f$ et comme $f^2(x_0) \neq 0$ le noyau de f n'est pas réduit à $\{0\}$ donc f n'est pas injective. Comme f est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, f n'est pas non plus surjective.

Autre façon : $f^3 = 0$ donc $\det(f^3) = 0$, soit $(\det(f))^3 = 0$ d'où $\det(f) = 0$ donc f n'est ni injective ni surjective.

3. Soient des réels α, β et γ tels que $\alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0$. En prenant l'image des deux membres par f^2 il vient, vu la linéarite de f^2 : $\alpha f^2(x_0) + \beta f^3(x_0) + \gamma f^4(x_0) = 0$. Or $f^3 = 0$ donc $f^4 = 0$ d'où $\alpha f^2(x_0) = 0$ soit $\alpha = 0$ (car $f^2(x_0) \neq 0$).

On a donc $\beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0$. De même, en prenant l'image par f, on obtient $\beta = 0$. Il reste donc $\beta f(x_0) = 0$ d'où $\beta = 0$. Le système $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est donc libre.

Comme il a trois éléments dans E de dimension 3 c'est donc une base de E.

4. Soit $x \in \ker(Id_E + f)$. On a $(Id_E + f)(x) = 0$ soit $x + f(x) = 0$. En prenant l'image par f^2 on obtient $f^2(x) + f^3(x) = 0$ donc $f^2(x) = 0$ (car $f^3(x) = 0$). Dans $x + f(x) = 0$ on prend l'image par f et on obtient $f(x) + f^2(x) = 0$, soit $f(x) = 0$ (car $f^2(x) = 0$). Comme $x + f(x) = 0$ on a donc $x = 0$ et $\ker(Id_E + f) = \{0\}$.

Il en résulte que $Id_E + f$ est un endomorphisme de E injectif, donc bijectif car E est de dimension finie.

5. Par distributivité de $\circ$ sur $+$ on a : $(Id_E + f) \circ (Id_E - f + f^2) = Id_E - f + f^{323} + f - f^2 + f^3 = Id_E$ car $f^3 = 0$.

De même $(Id_E - f + f^2) \circ (Id_E + f) = Id_E$.

Il en résulte que $Id_E + f$ est un endomorphisme bijectif et $(Id_E + f)^{-1} = Id_E - f + f^2$.

6. Soit $P \in E$. Comme $d^\circ(P) \leq 2$ on a $P''' = 0$ soit $D^3(P) = 0$ donc $D^3 = 0$.

De plus $D^2(X^2) = 2 \neq 0$ donc $D^2 \neq 0$.

On a : $P \in \ker D \iff P' = 0 \iff P = C$, polynôme constant i.e $\ker D = \mathbb{R}_0[X]$.

On a donc $\dim\ker D = 1$ et d'après le théorème du rang on a $\mathrm{rg}(D) = 2$.

7. On a $u = Id_E + D$ donc, d'après 7/ u est un endomorphisme bijectif et $u^{-1} = Id_E - D + D^2$.

On a $u(P) = X^2 + 1 \Leftrightarrow P = u^{-1}(X^2+1) = (Id_E - D + D^2)(X^2+1) = X^2 + 1 - 2X + 2 = X^2 - 2X + 3$.

$X^2 - 2X + 3$ est donc l'antécédent de $X^2 + 1$ par u.

8. D'après la question précédente, si on pose $Q = X^2 - 2X + 3$, on a $u^{-1}(Q) = X^2 + 1$, soit $(Id_E - D + D^2)(Q) = X^2 + 1$ ou encore $Q'' - Q' + Q = X^2 + 1$ donc le polynôme Q est solution particulière de l'équation différentielle.

Son équation caractéristique est $r^2 - r + 1 = 0$ dont les solutions sont $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc $e^{x/2}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + B\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$ (A et B réels).

Les solutions de l'équation différentielle sont donc $y(x) = e^{x/2}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + B\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + x^2 - 2x + 3$.

9. Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ l'application linéaire u existe et est unique (application linéaire est déterminée par l'image d'une base).

10. On a $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & -14 & 9 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ (opéraition : $C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1$,$C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1$) $= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} 2$.

On a $a = u(e_1), b = u(e_2), c = u(e_3)$ donc $\mathrm{rg}u = rg(a,b,c) = 2$, et d'après le calcul précédent une base de l'image de u est $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'après le théorème du rang ($\mathrm{rg}u = \dim\mathbb{R}^3 - \dim\ker u$) on a $\dim\ker u = 1$.

11. Les formules analytiques de u sont $\begin{cases} x' = & -x+3y-2z \\ y' = & x-8y+5z \\ z' = & 3x-14y+9z \end{cases}$ (developper $u(x,y,z) = u(xe_1+ye_2+ze_3)$).

On a alors $u(x,y,z) = (0,0,0) \iff \begin{cases} -x+3y-2z & =0 \\ x-8y+5z & =0 \\ 3x-14y+9z & =0 \end{cases}$. Ce système équivaut à $\begin{cases} -x+3y-2z & =0 \\ -5y+3z & =0 \\ -5y+3z & =0 \end{cases}$ (opérations $L_2 \leftarrow L_1+L_2, L_3 \leftarrow L_3+3L_1$), équivalent à $\begin{cases} -x+3y-2z & =0 \\ -5y+3z & =0 \end{cases}$.

On résout ce système en prenant par exemple $y=\alpha$ pour paramètre et on obtient $z=\frac{5}{3}\alpha$ et $x=-\frac{1}{3}\alpha$.

On a donc $\ker u = \left\{\left(\frac{-1}{3}\alpha, \alpha, \frac{5}{3}\alpha\right) / \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

C'est la droite vectorielle engendrée par $\left(\frac{-1}{3}, 1, \frac{5}{3}\right)$, donc $\dim \ker u = 1$.

D'après le théorème du rang on retrouve que $\mathrm{rg} u = 2$.

12. Posons $(x',y',z') = u(x,y,z)$ et $(x'',y'',z'') = u^2(x,y,z) = u(x',y',z')$ avec $\begin{cases} x'' = & -x'+3y'-2 \\ y'' = & x'-8y'+5z \\ z'' = & 3x'-14y'+9 \end{cases}$

et $\begin{cases} x' = & -x+3y-2z \\ y' = & x-8y+5z \\ z' = & 3x-14y+9z \end{cases}$. On trouve $\begin{cases} x'' = & -2x'+y'-z' \\ y'' = & 6x'-3y'+3z' \\ z'' = & 10x'-5y'+5z' \end{cases}$.

Les formules analytiques de u^3 sont $\begin{cases} x''' = & -x''+3y''-2z''=0 \\ y''' = & x''-8y''+5z''=0 \\ z''' = & 3x''-14y''+9z''=0 \end{cases}$.

Remarque : la matrice de u dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & -14 & 9 \end{pmatrix}$. Pour avoir les formules analytiques de u^2 on peut calculer M^2 et on a $M^3 = (0)$ (matrice nulle).

13. Comme Id_E et u commutent on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$v^n = (Id_E+u)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^k$$

car $u^k = 0$ pour $k \geq 3$,donc $\boxed{v^n = Id_E + nu + \frac{n(n-1)}{2}u^2}$.